Klasična mehanika
Teorija

Peter Andolšek
April 2025

Kazalo

1 Uvod **2**

2 Inercialni opazovalni sistemi **3**

3 Kinematika enega delca **3**

4 Dinamika enega delca **4**
4.1 Gibalna količina . . . 4
4.2 Vrtilna količina . . . 5
4.3 Energija . . . 6

5 Problem središčnega potenciala **7**
5.1 Redukcija na enodimenzionalni problem . . . 7
5.2 Gravitacijski potencial . . . 8
5.3 Oblika tira . . . 9
5.4 Keplerjevi zakoni . . . 10
5.5 Problem dveh teles . . . 10

6 Dinamika sistema delcev **11**
6.1 Gibalna količina . . . 11
6.2 Vrtilna količina . . . 12
6.3 Energija . . . 13

7 Togo telo **14**
7.1 Gibalna količina . . . 14
7.2 Vrtilna količina in vztrajnostni tenzor . . . 15
7.3 Kinetična energija . . . 16
7.4 Steinerjev izrek . . . 16

8 Neinercialni opazovalni sistemi **17**
8.1 Vrteči se sistem . . . 17

9 Dodatno branje **18**

1. Uvod

Oče sodobne znanosti je bil **Galileo Galilei** (1564–1642), saj je postavil osnove sodobnega znanstvenega raziskovanja na podlagi eksperimentov in se v zgodovino znanosti zapisal z mnogimi odkritji, ki so spremenila pogled na svet. Bil je prvi, ki je uporabil daljnogled za opazovanje izvenzemeljskih pojavov. Z opazovanji kraterjev na Luni je pokazal, da svet ni sestavljen iz popolnih krogel, na podlagi Venerinih men in kroženja Galilejevih satelitov okrog Jupitra pa je pokazal, da Zemlja vendarle ni v središču vesolja (in s tem sprožil veliko nenaklonjenosti s strani Cerkve). Prvi se je zavedal, da mirovanje ni absolutno – če se zapremo v podpalubje ladje, ki se enakomerno giblje glede na obalo, tega enakomernega gibanja z nobenim eksperimentom ne moremo zaznati: temu sedaj pravimo **Galilejeva invarianca**. Galileo je raziskoval tudi kotaljenje kroglic na klancu in s tem pokazal **ekvivalenčno načelo** – kroglice v gravitacijskem polju ne glede na sestavo pospešujejo enako hitro.

Naslednji veliki korak je storil **Isaac Newton** (1643–1727), ki je soodkril tehnike infinitezimalnega računa, s katerimi je lahko v prelomnem delu ***Principia*** kompaktno zapisal svoje tri zakone mehanike, ki predstavljajo osnovo **Newtonove mehanike**. Ideja teorije je preprosta: če poznamo začetne položaje in hitrosti delcev, lahko s podanimi silami napovemo usodo vesolja v preteklosti in prihodnosti. Newton je privzel gravitacijsko silo, ki pada z r^{-2} in z uporabo svojih zakonov teoretično pojasnil Keplerjeve eliptične tire planetov. V tem sestavku bomo spoznali ravno osnove Newtonovih metod.

Z raznimi reformulacijami izvorne Newtonove mehanike, ki jim sedaj pravimo **analitična mehanika**, so lahko fiziki reševali vse širši nabor problemov. **Joseph Louis Lagrange** (1736–1813) je osnoval **Lagrangevo mehaniko**, ki se navidez popolnoma razlikuje od Newtonove mehanike – osnovana je na **načelu stacionarne akcije**, ki pravi, da se sistem razvija tako, da je akcija $S = \int L \, dt$ stacionarna na variacijo poti. Pri tem je L Lagrangeva funkcija, ki je razlika kinetične in potencialne energije sistema, $L = T - V$. Načelo stacionarne akcije privede do Lagrangevih enačb gibanja, ki elegantneje opisujejo probleme, kjer se pojavijo omejitve glede dovoljenih koordinat (recimo kroglica, ki prosto drsi na ukrivljeni žici). Zatem je **William Rowan Hamilton** (1805–1865) razvil **Hamiltonovo mehaniko**, ki pa je osnovana na Hamiltonovi funkciji $\mathcal{H}$ in pripelje do Hamiltonovih enačb gibanja.

Proti koncu 19. stoletja je fizika napredovala tudi na področju termodinamike in elektromagnetizma, toda začele so se pojavljati mnoge neskladnosti s klasično mehaniko, saj med drugim ni bila zmožna pojasniti energijskih nivojev atomov in ni pravilno napovedala spektra termičnega sevanja. Razrešitev nekaterih neskladnosti je prišla v začetku 20. stoletja, ko je **Albert Einstein** (1879–1955) leta 1905 s svojo **posebno teorijo relativnosti** razrešil neskladnost transformacij pri klasični mehaniki in klasični elektrodinamiki, leta 1915 pa je z uporabo ekvivalenčnega načela vpeljal **splošno teorijo relativnosti**, ki sedaj velja za teorijo, ki najbolje opisuje gravitacijo tudi v skrajnih režimih. Na drugi strani je **Max Planck** (1858–1947) z uvedbo kvantov elektromagnetnega sevanja (**fotonov**) uspešno pojasnil sevanje črnega telesa in sprožil razvoj **kvantne mehanike**, ki so jo fiziki razvijali predvsem v 20. letih prejšnjega stoletja. Kvantna mehanika se je razvila v kvantno teorijo polja, ki je vodila v standardni model interakcije osnovnih delcev. Kvantna teorija polja in splošna teorija relativnosti pa nista združljivi – njuna združitev v **teorijo kvantne gravitacije** ostaja odprto vprašanje.

Čeprav bi lahko nasprotovali učenju klasične mehanike, češ da je to napačna teorija, ki narobe opisuje svet, so nenazadnje vse fizikalne teorije le modeli, ki imajo omejen obseg veljave. Klasična mehanika izredno dobro opiše dogajanje vse od atomov do galaksij, poleg tega pa tudi naprednejše teorije uporabljajo analogije iz klasične mehanike, zato se je vredno nekoliko pomuditi in občudovati napovedno moč teorije.

(a) Galileo Galilei (b) Isaac Newton (c) Joseph Lagrange (d) William Hamilton

Slika 1: **Predstavniki razvoja klasične mehanike.**

2. Inercialni opazovalni sistemi

Opazovalni sistem je koordinatni sistem s koordinatami (t, x, y, z), kjer si predstavljamo, da razdalje merimo z idealnimi ravnili in čase z idealnimi urami. Obstajajo opazovalni sistemi, v katerih je gibanje delcev najpreprostejše: to so **inercialni (nepospešeni) sistemi**. Če se nek opazovalni sistem premika enakomerno glede na nek inercialni sistem, bo tudi ta sistem inercialen. V inercialnih sistemih se bodo točkasti delci, ki so na dovolj velikih razdaljah in med sabo ne interagirajo, gibali enakomerno po premicah, kot pravi **1. Newtonov zakon**:

Vsako telo se v odsotnosti zunanjih vplivov giblje enakomerno po premici.

V neinercialnih sistemih je gibanje težje obravnavati, saj se pojavijo sistemske sile, ki jih bomo podrobneje spoznali v poglavju 8.

3. Kinematika enega delca

Obdelajmo najprej kinematiko točkastega delca. *Točkasti* se nanaša na lastnost, da so dimenzije delca zanemarljive pri naši obravnavi.

Naj bo $\mathbf{r}$ **krajevni vektor** delca iz nekega izbranega izhodišča. **Kinematika** obravnava le količine, ki neposredno izhajajo iz krajevnega vektorja (ne vključujejo pa še mase). Delcu se krajevni vektor s časom spreminja – pravimo, da se giblje po **tiru** $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Definiramo **hitrost**

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \tag{3.1}$$

in **pospešek**

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}. \tag{3.2}$$

Pot delca je

$$s = \int v \, \mathrm{d}t \,, \tag{3.3}$$

torej $\mathrm{d}s = v \, \mathrm{d}t$. Enotski **tangentni vektor** kaže v smeri tira:

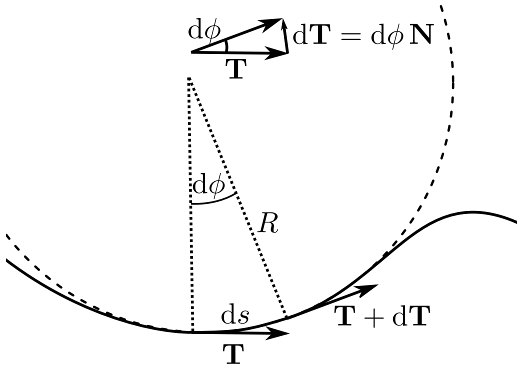
$$\mathbf{T} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{v}. \tag{3.4}$$

S skice razberemo, da velja $\mathrm{d}\mathbf{T} = \mathbf{N}\,\mathrm{d}\phi$, kjer je $\mathbf{N}$ trenutni enotski **normalni vektor** na tir. Odvod po času je torej:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathbf{N} = \frac{v}{R}\mathbf{N}, \tag{3.5}$$

kjer je R **trenutni polmer kroženja** in smo uporabili definicijo kota $\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}s/R$. Sedaj uporabimo ugotovitve na tiru delca. Njegova hitrost je:

$$\dot{\mathbf{r}} = v\mathbf{T}, \tag{3.6}$$



njegov pospešek pa

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{v}\mathbf{T} + v\dot{\mathbf{T}} = \dot{v}\mathbf{T} + \frac{v^2}{R}\mathbf{N}. \tag{3.7}$$

Vidimo, da lahko vsak pospešek razdelimo na pravokotna prispevka **tangencialnega pospeška** $\dot{v}$ in **radialnega pospeška** v^2/R. [1] Definiramo še trenutno **kotno hitrost** ω in **kotni pospešek** α:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{R}, \tag{3.8}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}. \tag{3.9}$$

Sedaj lahko radialni pospešek zapišemo tako:

$$a_\mathrm{r} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R. \tag{3.10}$$

V primeru, ko se polmer kroženja ne spreminja (torej ko se telo giblje po krožnici), pa lahko zapišemo tangencialni pospešek tako:

$$a_\mathrm{t} = \dot{v} = \alpha R. \tag{3.11}$$

4. Dinamika enega delca

Ko se podamo v **dinamiko**, nas začne zanimati še, kako delci med sabo interagirajo. **Masa** m je količina, ki opisuje dinamične lastnosti delca in se skozi potek časa ne spreminja.

4.1 Gibalna količina

Gibalno količino $\mathbf{p}$ definiramo kot zmnožek mase delca in njegove hitrosti:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \tag{4.1}$$

Na delec lahko vplivajo mnogi dejavniki, ki jih povzamemo s pojmom **sile**. Na delec lahko deluje mnogo sil $\mathbf{F}_i$, toda pomembna je le njihova vektorska vsota, ki se imenuje **rezultanta sil** $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i.$$

[1]Pazimo, da ne mešamo pojmov $\dot{v} = \mathrm{d}|\mathbf{v}|/\mathrm{d}t$ in $a = |\,\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t\,|$.

Celotno dinamiko sistema lahko spravimo v empirični **2. Newtonov zakon**, ki pravi, da v inercialnih sistemih gibanje delca opisuje diferencialna enačba

$$\boxed{\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}.} \tag{4.2}$$

Ker je masa delca konstantna, pa lahko 2. Newtonov zakon zapišemo tako:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \tag{4.3}$$

Če enačbo 4.2 integriramo po času, sledi **izrek o gibalni količini**:

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,\mathrm{d}t = \mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1).} \tag{4.4}$$

Integral na levi imenujemo **sunek rezultante sil**, tako da lahko izrek o gibalni količini zapišemo z besedami:

Sprememba gibalne količine delca je enaka sunku rezultante sil.

V posebnem primeru, ko je sunek rezultante sil enak 0, se gibalna količina *ohrani.* Ohranitveni zakon lahko uporabimo tudi v primerih, ko je rezultanta sil končna in čas neskončno kratek (recimo pri trkih).

4.2 Vrtilna količina

Definirajmo **vrtilno količino**:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}. \tag{4.5}$$

Zanima nas spreminjanje vrtilne količine s časom:

$$\dot{\mathbf{L}} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = m\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Če definiramo **navor**

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_i, \tag{4.6}$$

in **rezultanto navorov**:

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \tag{4.7}$$

lahko zgornjo ugotovitev zapišemo tako:

$$\boxed{\mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}}.} \tag{4.8}$$

Opazimo očitno podobnost z 2. Newtonovim zakonom. Podobno lahko tudi tu zapišemo **izrek o vrtilni količini**:

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}\,\mathrm{d}t = \mathbf{L}(t_2) - \mathbf{L}(t_1).} \tag{4.9}$$

Sprememba vrtilne količine delca je enaka sunku rezultante navorov.

V posebnem primeru, ko je sunek rezultante navorov enak 0, se vrtilna količina *ohrani.*

4.3 Energija

Definirajmo **delo** na delec, ki ga opravimo v času, ko delec prepotuje od $\mathbf{r}_1$ v $\mathbf{r}_2$:

$$\boxed{A_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.} \tag{4.10}$$

Uporabimo dejstvo, da $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{v}\,\mathrm{d}t$ in

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v^2\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}.$$

Sedaj lahko delo zapišemo tako (kjer mimogrede še vidimo, da je **moč** podana s $P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = \mathrm{d}A/\mathrm{d}t$):

$$A_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} m\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}m\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v^2\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2,$$

kjer je v_i velikost hitrosti v točki $\mathbf{r}_i$. Če definiramo **kinetično energijo**

$$T = \frac{1}{2}mv^2, \tag{4.11}$$

lahko zgornji izraz zapišemo v sledeči obliki, ki ga imenujemo **izrek o ohranitvi kinetične energije**:

$$\boxed{A_{12} = T_2 - T_1.} \tag{4.12}$$

Opravljeno delo na delec je enako razliki kinetičnih energij.

Če sila deluje tako, da je delo A_{12} neodvisno od ubrane poti (odvisno pa je le od začetne in končne točke), se takšna sila imenuje **konservativna**. To tudi pomeni, da je delo po zaključeni zanki enako 0 (ker če delec pustimo stati v neki točki, bo opravljeno delo 0, če pa ga premikamo okrog in vrnemo v isto točko, pa mora biti zaradi neodvisnosti od poti delo tudi enako 0):

$$\oint \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = 0. \tag{4.13}$$

Primeri konservativnih sil so gravitacijska sila, elektrostatska sila in sila vzmeti. Izrek iz vektorske analize pravi, da silo, ki zadosti enačbi 4.13, lahko zapišemo kot gradient neke skalarne funkcije, torej lahko zapišemo:

$$\boxed{\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} V.} \tag{4.14}$$

Funkcijo $V(\mathbf{r})$ imenujemo **potencialna energija**. Negativni znak se v izrazu pojavi zaradi dogovora (ker želimo, da sila kaže v smeri največjega padanja potencialne energije). Iz enačbe 4.14 sledi, da je totalni diferencial potencialne energije enak:

$$\mathrm{d}V = -\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Velja torej $A_{12} = V_1 - V_2$ in iz tega **izrek o kinetični in potencialni energiji**:

$$\boxed{T_1 + V_1 = T_2 + V_2.} \tag{4.15}$$

V primeru konservativnih sil se vsota kinetične in potencialne energije ohranja.

Izraz $T + V$ imenujemo **skupna energija** E. Opazimo, da izhodišče potencialne energije ni pomembno, saj za poljubno konstanto λ velja $\boldsymbol{\nabla}(V + \lambda) = \boldsymbol{\nabla} V$.

5. Problem središčnega potenciala

Pomembna uporaba zgornjih spoznanj je v primeru, ko je potencial odvisen le od oddaljenosti od izhodišča, $V = V(r)$.

5.1 Redukcija na enodimenzionalni problem

Ker je v tem primeru sila $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$ usmerjena proti izhodišču, je vzporedna krajevnemu vektorju in torej na delec v centralnem potencialu ne deluje navor. Sledi, da se vrtilna količina ohrani:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \text{konst.} \tag{5.1}$$

Posebej to pomeni, da se ohrani smer vrtilne količine, toda, ker je vrtilna količina po definiciji pravokotna na krajevni vektor, sledi, da se delec v centralnem potencialu giblje le v neki ravnini. Za opis njegovega položaja lahko uporabimo torej polarni koordinati r in φ. Bazna vektorja se izražata s kartezičnimi takole:

$$\hat{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Njuna odvoda po času sta:

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}} = \begin{pmatrix} -\dot\varphi\sin\varphi \\ \dot\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} = \dot\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}}, \qquad \dot{\hat{\boldsymbol{\varphi}}} = \begin{pmatrix} -\dot\varphi\cos\varphi \\ -\dot\varphi\sin\varphi \end{pmatrix} = -\dot\varphi\hat{\mathbf{r}}. \tag{5.3}$$

Sedaj lahko odvajamo krajevni vektor $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ in dobimo hitrost

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot r\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\hat{\mathbf{r}}} = \tag{5.4}$$
$$= \dot r\hat{\mathbf{r}} + r\dot\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{5.5}$$

in pospešek

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot r\hat{\mathbf{r}} + \dot r\dot{\hat{\mathbf{r}}} + \dot r\dot\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}} + r\ddot\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}} + r\dot\varphi\dot{\hat{\boldsymbol{\varphi}}} = \tag{5.6}$$
$$= (\ddot r - r\dot\varphi^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi)\hat{\boldsymbol{\varphi}}. \tag{5.7}$$

Sila je podana preprosto tako:

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\hat{\mathbf{r}}, \tag{5.8}$$

s tem pa lahko zapišemo enačbo gibanja:

$$m(\ddot r - r\dot\varphi^2)\hat{\mathbf{r}} + m(r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi)\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\hat{\mathbf{r}}. \tag{5.9}$$

Ker sta bazna vektorja neodvisna, dobimo dve enačbi (vsaka za svojo komponento). $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ komponenta je še posebej preprosta in jo lahko zapišemo kot odvod neke količine:

$$0 = r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot\varphi\right). \tag{5.10}$$

Prepoznamo, da je količina znotraj odvoda ravno velikost vrtilne količine na enoto mase,

$$l = |\mathbf{L}|/m = r^2\dot\varphi. \tag{5.11}$$

Seveda se v našem problemu ohranja, kar posebej jasno nakaže enačba 5.10. $\hat{\mathbf{r}}$ komponenta enačbe 5.9 se glasi

$$m(\ddot r - r\dot\varphi^2) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \tag{5.12}$$

in z vrtilno količino se lahko znebimo količine $\dot{\varphi}$:

$$m\ddot{r} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} + \frac{ml^2}{r^3}. \tag{5.13}$$

Povzemimo postopek do sedaj: zaradi središčnega potenciala smo spoznali, da se vrtilna količina ohrani in nato smo uporabili ohranitev smeri vrtilne količine, da smo skrčili izvorni tridimenzionalni problem na gibanje po ravnini, zatem pa smo uporabili ohranitev velikosti vrtilne količine, da smo problem reducirali v enodimenzionalnega. Vse to nam je omogočilo dejstvo, da se vrtilna količina ohranja – ohranitveni zakoni so očitno v klasični mehaniki vsekakor zelo pomembni.

Enačbo 5.13 lahko zapišemo v sledeči obliki:

$$m\ddot{r} = -\frac{\mathrm{d}V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r}, \tag{5.14}$$

kjer smo uvedli **efektivni potencial**

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{ml^2}{2r^2}. \tag{5.15}$$

Zapišimo še izraz za skupno energijo, ki je tudi konstanta gibanja:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{ml^2}{2r^2} + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r). \tag{5.16}$$

Skupna energija začetnega problema je torej enaka, kot če opazujemo enodimenzionalni problem, ki ga opisuje enačba 5.15, in za potencialno energijo uporabimo efektivni potencial.

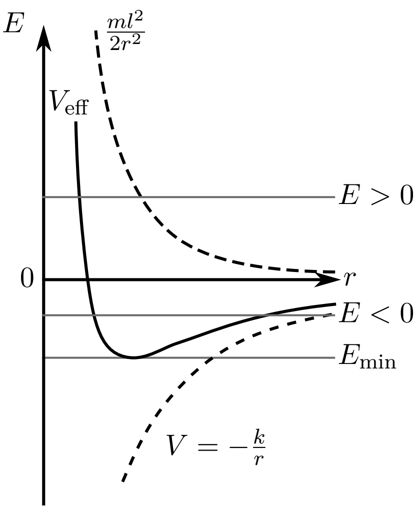
5.2 Gravitacijski potencial

Uporabimo sedaj standardni Newtonov gravitacijski potencial

$$\boxed{V(r) = -\frac{km}{r}.} \tag{5.17}$$

Takšen potencial s $k = GM$ proizvaja telo z maso M, ki je pritrjeno v izhodišču. Efektivni potencial se glasi:

$$\boxed{V_{\text{eff}}(r) = -\frac{km}{r} + \frac{ml^2}{2r^2}.} \tag{5.18}$$



Raziščimo osnovne lastnosti gibanja v takšnem potencialu v odvisnosti od energije E in vrtilne količine l sistema. Kjer $E < V_{\text{eff}}$, bi moral imeti delec negativno kinetično energijo $T = E - V_{\text{eff}}$, za kar vemo, da se ne more zgoditi, zato takemu območju pravimo **prepovedano območje**.

V_{eff} zavzame minimalno vrednost, ko $V'_{\text{eff}} = 0$, torej $r_{\text{min}} = l^2/k$ in $V_{\text{eff}}(r_{\text{min}}) = -mk^2/2l^2$. Ločimo več primerov:

(a) $E = E_{\text{min}} = -mk^2/2l^2$: delec je v tem primeru ujet na dno potenciala v r_{min}, saj je vse ostalo prepovedano območje. Vendarle se njegov položaj (enakomerno) spreminja, saj $\dot{\varphi} = l/r^2$: tirnica je krožnica.

(b) $E_{\text{min}} < E < 0$: delec je ujet med r_1 in r_2, kjer $V_{\text{eff}}(r_1) = V_{\text{eff}}(r_2) = E$. Njegova radialna koordinata torej niha med periapsido r_1 in apoapsido r_2, medtem pa se seveda tudi njegova koordinata φ spreminja – kmalu bomo videli, da se delec giblje po elipsi.

(c) $E = 0$: delec ima v neskončnosti kinetično energijo 0. Iz mirovanja v neskončnosti ga torej gravitacijsko polje spravi v gibanje do periapside r_1, kjer je $V_{\text{eff}}(r_1) = 0$, in nato odide nazaj v mirovanje v neskončnosti – videli bomo, da se delec giblje po paraboli.

(d) $E > 0$: delec ima sedaj v neskončnosti pozitivno kinetično energijo. Situacija je podobna kot pri prejšnjem primeru, le da bomo videli, da je tirnica sedaj hiperbola.

5.3 Oblika tira

Enačba 5.16 je diferencialna enačba prvega reda in jo lahko separiramo ter tako dobimo:

$$\boxed{t = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}(r)}}.} \tag{5.19}$$

Ta integral je običajno zelo težko rešiti. Namesto podatka o položaju v odvisnosti od časa $r(t)$ raje najprej izračunajmo obliko tira $r(\varphi)$. Poleg tega namesto r raje uporabimo spremenljivko

$$u = \frac{1}{r}. \tag{5.20}$$

Prepišimo enačbo 5.13 z u (namesto r) in φ (namesto t). Najprej zapišimo radialno hitrost:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi} = -l\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}. \tag{5.21}$$

Upoštevali smo $\dot{\varphi} = l/r^2 = lu^2$. Pospešek je

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-l\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right) = -l\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2}\dot{\varphi} = -l^2u^2\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2}. \tag{5.22}$$

Enačba 5.13 se torej z novimi spremenljivkami glasi:

$$-ml^2u^2\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} + ml^2u^3. \tag{5.23}$$

Če uporabimo Newtonski gravitacijski potencial $V = -km/r$, lahko zgornjo enačbo zapišemo tako:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} = -\left(u - \frac{k}{l^2}\right). \tag{5.24}$$

Takšno diferencialno enačbo pa že poznamo: to je preprosto harmonski oscilator z zamaknjeno izhodiščno lego. Rešitev običajno zapišemo v obliki $A\cos\varphi + B\sin\varphi$, sedaj pa jo raje zapišimo v obliki:

$$u - \frac{k}{l^2} = A\cos(\varphi - \varphi_0). \tag{5.25}$$

Običajno orientiramo naše koordinate tako, da se periapsida zgodi pri $\varphi = 0$. V periapsidi je u največji, torej mora biti $\varphi_0 = 0$. Če zgornjo enačbo obrnemo in vstavimo nazaj $r = 1/u$, lahko rezultat zapišemo v obliki polarne enačbe stožnice:

$$\boxed{r(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\varphi},} \tag{5.26}$$

kjer

$$e = \frac{Al^2}{k} \quad \text{in} \quad a(1-e^2) = \frac{l^2}{k}. \tag{5.27}$$

Skupno energijo orbite lahko dobimo tako, da jo izračunamo v periapsidi, ko $\dot{r} = 0$ in $r = a(1-e)$. Poleg tega iz zgornje enačbe upoštevamo $l^2 = ka(1-e^2)$.

$$E/m = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{l^2}{r^2}\right) - \frac{k}{r} = \frac{ka(1-e^2)}{2a^2(1-e)^2} - \frac{k}{a(1-e)} = -\frac{k}{2a}. \tag{5.28}$$

Ker se energija ohrani, velja to tudi na celotni tirnici:

$$\boxed{E = -\frac{km}{2a}.} \tag{5.29}$$

5.4 Keplerjevi zakoni

S tem smo izpeljali prvi Keplerjev zakon: telo se v Newtonovem gravitacijskem potencialu giblje po stožnici. Izpeljemo pa lahko tudi drugi Keplerjev zakon, ki pravi, da je ploščinska hitrost telesa v Newtonovem gravitacijskem potencialu konstantna. Delček ploščine, ki ga delec opiše v času dt, je namreč podan s ploščino malega trikotnička s stranico $r\dot{\varphi}\,\mathrm{d}t$ in višino r:

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}\,\mathrm{d}t\,. \tag{5.30}$$

Sledi torej

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{l}{2},} \tag{5.31}$$

kar pa že vemo, da je konstantno. Sedaj izpeljimo še tretji Keplerjev zakon. Ploščina elipse je:

$$A = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2}, \tag{5.32}$$

obhodni čas pa je po drugem Keplerjevem zakonu:

$$T = \frac{A}{l/2} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{ka(1-e^2)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}a^{3/2}. \tag{5.33}$$

Ugotovitev zapišemo tako:

$$\boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}.} \tag{5.34}$$

5.5 Problem dveh teles

V prejšnjih poglavjih smo obravnavali gibanje delca z maso m v fiksnem gravitacijskem potencialu $-GM/r$, ki bi ga ustvarjalo telo z maso M v izhodišču. Sedaj si oglejmo še medsebojno interakcijo dveh teles in videli bomo, da lahko tudi takozvani **problem dveh teles** prevedemo v problem enega telesa v središčnem potencialu, ki smo ga že obdelali zgoraj. Imamo dve telesi z masama m_1 in m_2, ki se medsebojno privlačita. Velja:

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12}, \qquad m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21}. \tag{5.35}$$

Prvo enačbo delimo z m_1, drugo pa z m_2 in upoštevamo $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\mathbf{F}_{21}/m_1, \qquad \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21}/m_2. \tag{5.36}$$

Označimo relativni separacijski vektor z $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Če prvo enačbo odštejemo od druge, dobimo:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\mathbf{F}_{21}. \tag{5.37}$$

Če uvedemo **reducirano maso**

$$\mu = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \tag{5.38}$$

lahko enačbo 5.37 zapišemo tako:

$$\mathbf{F}_{21} = -\frac{G m_1 m_2}{r^3}\mathbf{r} = \mu \ddot{\mathbf{r}}. \tag{5.39}$$

Enačbo delimo z μ in dobimo

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}\mathbf{r} = -\frac{G\mathcal{M}}{r^3}\mathbf{r}, \tag{5.40}$$

kjer smo uvedli **skupno maso** $\mathcal{M} = m_1 + m_2$. Problem, kjer se dve masi gibljeta pod medsebojnim vplivom po tirih $\mathbf{r}_1$ in $\mathbf{r}_2$ lahko torej prevedemo na problem, kjer nas zanima le separacijski vektor $\mathbf{r}$, ki kaže iz izhodišča do mase μ, ki se giblje v fiksnem središčnem potencialu $V = -k\mu/r$, kjer $k = G\mathcal{M}$ – problem dveh teles je torej preveden v problem enega telesa. Oba problema sta sedaj matematično ekvivalentna in lahko vse sklepe uporabljamo tudi tukaj, le da m nadomestimo z μ, M pa z $\mathcal{M}$. Keplerjev zakon se torej glasi:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G\mathcal{M}}{4\pi^2}, \tag{5.41}$$

kjer je a velika polos relativnega tira (za katerega vemo, da je tudi elipsa). Kot zgled zapišimo še izraz za energijo:

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{G\mathcal{M}\mu}{r} = -\frac{G\mathcal{M}\mu}{2a}, \tag{5.42}$$

kjer je r relativna oddaljenost in v relativna hitrost. Iz zadnje enačbe sledi uporabna **enačba vis-viva**, ki povezuje hitrost gibanja in relativno oddaljenost med telesoma:

$$v^2 = G\mathcal{M}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{5.43}$$

6. Dinamika sistema delcev

Obravnavajmo sedaj *sistem* točkastih teles, ki jih oštevilčimo z indeksi i.

6.1 Gibalna količina

Na i-ti delec deluje lahko neka zunanja sila $\mathbf{F}_i^{(\mathrm{z})}$ in ostali delci: j-ti delec deluje na i-ti delec s silo $\mathbf{F}_{ij}$. 2. Newtonov zakon za i-ti delec se torej glasi:

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \sum_j \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{(\mathrm{z})}. \tag{6.1}$$

Če seštejemo 2. Newtonove zakone za vse delce, dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(\mathrm{z})} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ij} \tag{6.2}$$

Če velja[2] **šibki zakon akcije in reakcije** oziroma **3. Newtonov zakon**, $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$, velja za vse pare delcev $\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = \mathbf{0}$, torej se zadnja vsota v zgornjem izrazu izvrednoti v $\mathbf{0}$. Definirajmo še **težišče** $\mathbf{r}_0$ kot z maso uteženo povprečje položajev delcev:

$$\boxed{\mathbf{r}_0 = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M},} \tag{6.3}$$

kjer je $M = \sum_i m_i$ skupna masa sistema. S to definicijo in spoznanjem, da je vsota notranjih sil (če velja šibki zakon o akciji in reakciji) enaka 0, lahko izraz 6.2 zapišemo:

$$\boxed{M \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}_0}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}^{(\mathrm{z})},} \tag{6.4}$$

pri čemer je $\mathbf{F}^{(\mathrm{z})} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(\mathrm{z})}$ rezultanta vseh zunanjih sil.

> *Če sile zadostijo šibkemu zakonu akcije in reakcije, potem se težišče sistema giblje tako, kot da bi nanj delovala le rezultanta zunanjih sil.*

Skupna gibalna količina je torej podana z

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = M \dot{\mathbf{r}}_0$$

in velja splošna verzija izreka o gibalni količini:

> *Sprememba gibalne količine sistema je enaka sunku rezultante zunanjih sil. Če je rezultanta zunanjih sil enaka 0, se skupna gibalna količina ohrani.*

6.2 Vrtilna količina

Poskusimo podobno posplošitev tvoriti še za izrek o vrtilni količini. Za vsak delec velja:

$$\dot{\mathbf{L}}_i = \mathbf{r}_i \times \left(F_i^{(\mathrm{z})} + \sum_j \mathbf{F}_{ji} \right) \tag{6.5}$$

Če posamezne vrtilne količine seštejemo, torej dobimo

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(\mathrm{z})} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}. \tag{6.6}$$

Če velja šibki zakon akcije in reakcije, lahko zadnji člen zapišemo kot vsoto parov sledeče oblike:

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ji} = \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ji}, \tag{6.7}$$

kjer je $\mathbf{r}_{ij}$ vektor med položajema $\mathbf{r}_i$ in $\mathbf{r}_j$. Če so sile tudi *centralne* (čemur pravimo **močni zakon akcije in reakcije**), potem vsi takšni členi izginejo in ostane le:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M}^{(\mathrm{z})},} \tag{6.8}$$

kjer je $\mathbf{M}^{(\mathrm{z})} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(\mathrm{z})}$ rezultanta zunanjih navorov.

> *Če velja močni zakon akcije in reakcije, potem je sprememba skupne vrtilne količine sistema enaka sunku rezultante navorov. Če je sunek rezultante navorov enak 0, potem se skupna vrtilna količina sistema ohrani.*

[2] V splošnem ta zakon (recimo za magnetno silo) ne velja.

Razstavimo sedaj krajevne vektorje na prispevek težišča $\mathbf{r}_0$ in položaj delca $\mathbf{r}'_i$ v težiščnem sistemu:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_0 \tag{6.9}$$

in (če zgornjo enačbo odvajamo)

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_0. \tag{6.10}$$

Skupna vrtilna količina je:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i m_i(\mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_0) = \\ &= \sum_i m_i \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i + \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i\right) \times \mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0 \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i m_i \mathbf{r}'_i. \end{aligned}$$

Izraz $\sum_i m_i \mathbf{r}'_i$ mora biti enak 0, saj je sorazmeren s položajem težišča v težiščnem sistemu. Sledi torej:

$$\boxed{\mathbf{L} = M\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i = \mathbf{L}_0 + \mathbf{L}',} \tag{6.11}$$

kar pomeni, da lahko vrtilno količino razstavimo na dva dela: vrtilna količina težišča okrog izhodišča $\mathbf{L}_0 = M\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0$ in vrtilna količina sistema v težiščnem sistemu $\mathbf{L}' = \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i$.

6.3 Energija

Tudi pri sistemu delcev lahko definiramo delo:

$$A_{12} = \sum_i \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_i = \sum_i \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \mathbf{v}_i \, \mathrm{d}t = \sum_i \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathrm{d}\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right). \tag{6.12}$$

Če vpeljemo kinetično energijo sistema

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2, \tag{6.13}$$

lahko spet zapišemo izrek o kinetični energiji

$$A_{12} = T_2 - T_1. \tag{6.14}$$

Kinetično energijo lahko (podobno kot pri vrtilni količini) razstavimo na prispevek težišča in sistema v težiščnem sistemu:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'_i) \cdot (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'_i) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_0^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \mathbf{v}_0 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i\right) \end{aligned}$$

Zadnji člen zopet izgine in ostane le:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 = T_0 + T'.} \tag{6.15}$$

Kinetično energijo lahko torej zapišemo kot kinetično energijo težišča $T_0 = \frac{1}{2} M v_0^2$ in kinetično energijo sistema v težiščnem sistemu $T' = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2$.

Kot smo to naredili pri obravnavavi za en delec, bi lahko tudi sedaj v primeru konservativnih zunanjih in notranjih sil, ki zadostijo močnemu zakonu o akciji in reakciji, zapisali sile kot gradient potencialne energije:

$$\mathbf{F}_i^{(z)} = -\boldsymbol{\nabla}_i V_i, \qquad \mathbf{F}_{ji} = -\boldsymbol{\nabla}_i V_{ij}, \tag{6.16}$$

kjer $\boldsymbol{\nabla}_i$ označuje gradient po koordinatah i-tega delca. Podrobno izpeljavo bomo izpustili, zapišimo pa le končni izraz za potencialno energijo:

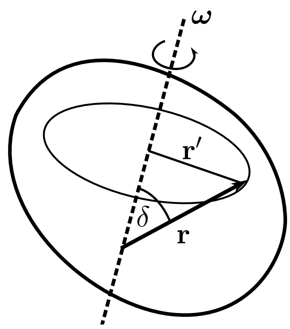
$$V = \sum_i V_i + \sum_{\substack{i,j \\ i<j}} V_{ij}. \tag{6.17}$$

Skupna energija $E = T + V$ se tudi tu v primeru konservativnih sil ohrani.

7. Togo telo

Poseben primer sistema teles je **togo telo**, ki si ga predstavljamo kot množico veliko delcev na položajih $\mathbf{r}_i$, kjer se medsebojna razdalja delcev $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ ne spreminja.

Naj se togo telo enakomerno vrti okrog dane osi s kotno hitrostjo ω. **Vektor kotne hitrosti** $\boldsymbol{\omega}$ kaže vzdolž osi vrtenja tako, da če obrnemo desni palec v smeri vektorja $\boldsymbol{\omega}$, se déli togega telesa gibljejo v smeri ostalih prstov. Kot je razvidno na desni skici, je hitrost dela togega telesa podana z $v = \omega r' = \omega r \sin\delta$. Usmerjena je pravokotno na os in $\mathbf{r}'$, torej je podana z



$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \tag{7.1}$$

7.1 Gibalna količina

Togo telo si predstavljamo kot zvezno tvorbo (sestavljeno iz tako veliko delcev, da jih za praktične namene ne gre razločevati). Želimo zapisati dinamične količine iz prejšnjih poglavij (kot sta vrtilna količina in kinetična energija), kar lahko naredimo tako, da vse znake $\sum_i$ zamenjamo z integralom $\int$ po vsem telesu, mase m_i zamenjamo z infinitezimali $\mathrm{d}m$, količine, kot je hitrost $\mathbf{v}_i$, pa nadomestimo z zveznimi funkcijami $\mathbf{v}(\mathbf{r})$.

Težišče je torej podano z:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\int \mathbf{r}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}. \tag{7.2}$$

Sedaj razstavimo gibanje togega telesa na gibanje njegovega težišča $\mathbf{r}_0$ in vrtenje okrog težišča s kotno hitrostjo $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'$$

Vedno se zavedamo, da je izraz $\int \mathbf{r}'\,\mathrm{d}m$ enak 0, saj je sorazmeren s položajem težišča v težiščnem sistemu.

Izračunajmo gibalno količino:

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{v}\,\mathrm{d}m = \int \mathbf{v}_0\,\mathrm{d}m + \int \mathbf{v}'\,\mathrm{d}m\,. \tag{7.3}$$

Zadnji člen lahko zapišemo v obliki $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathbf{r}'\,\mathrm{d}m$, torej izgine. Gibalna količina togega telesa je torej enaka gibalni količini težišča:

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{v}_0\,\mathrm{d}m = M\mathbf{v}_0. \tag{7.4}$$

7.2 Vrtilna količina in vztrajnostni tenzor

Vrtilna količina je podana tako:

$$\mathbf{L} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} \, \mathrm{d}m = \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \, \mathrm{d}m = \int [\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})] \, \mathrm{d}m \tag{7.5}$$

Zapišimo x komponento vrtilne količine:

$$L_x = \int \omega_x r^2 - x(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) \, \mathrm{d}m \tag{7.6}$$

L_x zapišemo lahko v sledeči obliki:

$$L_x = J_{xx}\omega_x + J_{yx}\omega_y + J_{zx}\omega_z, \tag{7.7}$$

če definiramo

$$J_{xx} = \int (r^2 - x^2) \, \mathrm{d}m = \int (y^2 + z^2) \, \mathrm{d}m \,, \tag{7.8}$$

$$J_{yx} = \int -xy \, \mathrm{d}m \,, \tag{7.9}$$

$$J_{zx} = \int -xz \, \mathrm{d}m \,. \tag{7.10}$$

Podobno lahko definiramo količine J_{ij} tudi za ostale komponente in z njimi sestavimo matriko:

$$\mathsf{J} = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) \, \mathrm{d}m & -\int xy \, \mathrm{d}m & -\int xz \, \mathrm{d}m \\ -\int xy \, \mathrm{d}m & \int (x^2 + z^2) \, \mathrm{d}m & -\int yz \, \mathrm{d}m \\ -\int xz \, \mathrm{d}m & -\int yz \, \mathrm{d}m & \int (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}m \end{bmatrix} \tag{7.11}$$

Kompaktneje:[3]

$$J_{ij} = \int (\delta_{ij} r^2 - r_i r_j) \, \mathrm{d}m \,. \tag{7.12}$$

To ni le tabela števil, ampak se pri zasuku koordinatnega sistema komponente tudi ustrezno transformirajo. Vse matrike, katerih komponente se ustrezno transformirajo, imenujemo *tenzorji 2. reda.* [4] Količini J zato pravimo **vztrajnostni tenzor**. Če uporabimo pravila za množenje matrik J in $\boldsymbol{\omega}$, lahko izraz za vrtilno količino zapišemo v obliki

$$\mathbf{L} = \mathsf{J}\boldsymbol{\omega}. \tag{7.13}$$

V splošnem zaradi neničelnih diagonalnih elementov tenzorja J vektorja $\mathbf{L}$ in $\boldsymbol{\omega}$ nista vzporedna, toda izkaže se, da obstaja takšna izbira rotacije osi, da ostanejo neničelni le diagonalni elementi J_{xx}, J_{yy} in J_{zz}. Smeri tako obrnjenih osi xyz imenujemo **glavne osi** in kažejo nekako v smereh največje simetrije. Če imamo koordinatni sistem poravnan s glavnimi osmi in kotna hitrost kaže v smeri osi i, potem je vrtilna količina podana z znano formulo, kjer se pojavi le skalar J_{ii}.

$$\mathbf{L} = J_{ii}\boldsymbol{\omega} \tag{7.14}$$

[3] Tu je δ_{ij} **Kroneckerjeva delta**, ki je enaka 1 v primeru, ko sta znaka i in j enaka, in je enaka 0 sicer. Primer: $\delta_{xx} = 1$ in $\delta_{xy} = 0$.

[4] Pravilneje, tenzor tipa (r, s) je multilinearna preslikava, ki r dualnih vektorjev in s vektorjev slika v realno število. Število $(r + s)$ imenujemo red tenzorja. Običajno identificiramo tenzor z njegovimi komponentami, zato si ga običajno predstavljamo kot $(r + s)$ dimenzionalno tabelo, vendar se moramo zavedati, da je tenzor sam po sebi geometrijski objekt, ki ni odvisen od izbire koordinat – čeprav se njegove komponente spreminjajo z zasukom koordinatnega sistema, se sam objekt ne spremeni.

Enačbo lahko odvajamo in če je J_{ii} konstanten, dobimo:

$$\mathbf{M} = J_{ii}\boldsymbol{\alpha}. \tag{7.15}$$

Zavedajmo se, da ta izraz v splošnem ne velja vedno, ampak le takrat, ko se telo vrti okrog glavne osi (kar pa načeloma vedno velja v tekmovalnih nalogah).

7.3 Kinetična energija

Kinetična energija je podana z:

$$T = \frac{1}{2}\int v^2\,\mathrm{d}m = \frac{1}{2}\int \mathbf{v}\cdot m\,\mathrm{d}\mathbf{v} = \frac{1}{2}\int (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\cdot\mathrm{d}\mathbf{p} = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{r}\times\mathrm{d}\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{L}. \tag{7.16}$$

Kotna hitrost je konstantna, zato smo jo lahko postavili ven iz integrala. Sledi torej:

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot \mathsf{J}\boldsymbol{\omega}. \tag{7.17}$$

Definirajmo še **vztrajnostni moment okrog osi**, katere smer je podana z enotskim vektorjem $\mathbf{n}$:

$$J = \mathbf{n}\cdot\mathsf{J}\mathbf{n} = \int (r^2 - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})^2)\,\mathrm{d}m = \int |\mathbf{r}\times\mathbf{n}|^2\,\mathrm{d}m\,. \tag{7.18}$$

Drugi enačaj sledi iz definicije 7.12 in nekaj aritmetike z indeksi, tretji enačaj pa sledi po Pitagorovem izreku, $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 + |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 = (ab)^2$. Ugotovitev lahko lepše zapišemo z uvedbo pravokotne razdalje od osi $r_\perp$:

$$\boxed{J = \int r_\perp^2\,\mathrm{d}m\,.} \tag{7.19}$$

Kinetično energijo, če se telo s kotno hitrostjo $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{n}$, torej lahko (vedno) zapišemo tako:

$$T = \frac{1}{2}J\omega^2. \tag{7.20}$$

7.4 Steinerjev izrek

Zanima nas relacija med vztrajnostnim momentom okrog osi skozi težišče in poljubno vzporedno premaknjeno os. Naj $\mathbf{r}_0$ označuje položaj težišča, $\mathbf{r}'$ položaj točk v težiščnem sistemu in $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$ položaj točk glede na poljubno izhodišče. Vztrajnostni moment okrog tega izhodišča je:

$$\begin{aligned} J &= \int |\mathbf{r}\times\mathbf{n}|^2\,\mathrm{d}m = \int |(\mathbf{r}_0+\mathbf{r}')\times\mathbf{n}|^2\,\mathrm{d}m = \\ &= \int |\mathbf{r}_0\times\mathbf{n}|^2 + 2(\mathbf{r}_0\times\mathbf{n})\cdot(\mathbf{r}'\times\mathbf{n}) + |\mathbf{r}'\times\mathbf{n}|^2\,\mathrm{d}m = M|\mathbf{r}_0\times\mathbf{n}|^2 + J_0. \end{aligned} \tag{7.21}$$

Srednji člen je izginil, ker $\int \mathbf{r}'\,\mathrm{d}m = \mathbf{0}$. Dobljeni izraz imenujemo **Steinerjev izrek**:

$$\boxed{J = J_0 + Md^2.} \tag{7.22}$$

Pri tem je $d = |\mathbf{r}_0\times\mathbf{n}|^2$ pravokotna oddaljenost nove vzporedno premaknjene osi od tiste skozi težišče.

8. Neinercialni opazovalni sistemi

V neinercialnih sistemih Newtonova mehanika v zgornji obliki odpove. Njeno veljavnost pa lahko ohranimo, če uvedemo **sistemske sile**, ki se v takih pospešenih sistemih obnašajo kot popolnoma prave sile.

Naj bo A inercialni sistem in B neinercialni sistem, katerega izhodišče se (v sistemu A) nahaja na $\mathbf{r}_0(t)$ in so njegovi bazni vektorji (v sistemu A) podani z $\mathbf{e}_i(t)$. Krajevni vektor delca v inercialnem sistemu A lahko podamo v obliki

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_B = \mathbf{r}_0 + \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{e}_i. \tag{8.1}$$

Za hitrost in pospešek v sistemu A torej dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_0}{\mathrm{d}t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_i}{\mathrm{d}t}, \tag{8.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_A}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_0}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{e}_i + 2\sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_i}{\mathrm{d}t} + \sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{e}_i}{\mathrm{d}t^2}. \tag{8.3}$$

8.1 Vrteči se sistem

Če se sistem B vrti s kotno hitrostjo $\boldsymbol{\omega}$ glede na sistem A, velja (kar smo geometrijsko pokazali v razpravi o togem telesu):

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \tag{8.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{e}_i}{\mathrm{d}t^2} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_i}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) \tag{8.5}$$

Ugotovitvi spravimo v enačbo 8.3 in dobimo:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_A}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_0}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{e}_i + 2\sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^{3} x_i \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^{3} x_i \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) = \\ &= \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_B + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_B + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_B),\end{aligned}$$

kjer se količine z indeksom B nanašajo na količine, izmerjene v sistemu B. Če pomnožimo obe strani z m in se zavedamo, da v inercialnem sistemu velja 2. Newtonov zakon v običajni obliki $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_A$ ter odštejemo z desne vse člene razen $\mathbf{a}_B$, dobimo nekoliko spremenjeni 2. Newtonov zakon (kjer sedaj spuščam indekse):

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0 - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} \tag{8.6}$$

Po vrsti so to običajne (prave) sile $\mathbf{F}$, **inercialna sila** $\mathbf{F}_a = -m\mathbf{a}_0$, **centrifugalna sila** $\mathbf{F}_{\text{cent}} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, **Coriolisova sila** $\mathbf{F}_{\text{Cor}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ in **Eulerjeva sila** $\mathbf{F}_{\text{E}} = -m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$. Če je sistem inercialen, se sistemske sile ne pojavijo. Če se sistem vrti in delec ni v izhodišču, vleče delec navzven centrifugalna sila. Če se sistem vrti in se delec premika, ga pravokotno na tir vleče Coriolisova sila. Če se sistem ne vrti enakomerno in delec ni v izhodišču, pa čuti Eulerjevo silo. Čeprav so te sile le geometrijski defekti neinercialnih sistemov, opazovalci te sile čutijo kot popolnoma prave (česar se dobro zavedamo, ko se z avtom vozimo po ovinkih). Običajno radi delamo v inercialnih sistemih, saj se tam sistemske sile ne pojavljajo, včasih pa je prikladneje delati v neinercialnih sistemih in upoštevamo še sistemske sile.

9. Dodatno branje

- David Tong: Dynamics and Relativity.
- Herbert Goldstein: Classical Mechanics.
- David Morin: Introduction to Classical Mechanics.
- Janez Strnad: Fizika I.
- Igor J. Irodov: Problems in General Physics (prvi del).