Diferencialne enačbe
Rešitve

Peter Andolšek
Marec 2025

1. Separabilne diferencialne enačbe prvega reda

Naloga 1.1

$$\Phi_V = \pi r^2 v = \pi r^2 \sqrt{2gh}$$

$$\Phi_V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\pi R^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_{h_0}^{h} \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = -\int_0^t \frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{r^2}{R^2}\sqrt{\frac{g}{2}}t\right)^2}$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\frac{R^2}{r^2} = \underline{\underline{7\,\mathrm{min}}}$$

Naloga 1.2 (a) Opazujemo neko tanko plast zraka (v obliki zelo tankega kvadra) debeline $\mathrm{d}z$ in površine ploskve S. Vsota sil da:

$$0 = -(p + \mathrm{d}p)S - \rho g S\,\mathrm{d}z + pS$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g$$

(b) Uporabimo idealno plinsko enačbo in integriramo (kjer upoštevamo, da je T konstanta):

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g = -\frac{pMg}{RT}$$

$$\int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\int_0^z \frac{Mg}{RT}\,\mathrm{d}z$$

$$p = p_0 e^{-z/z_0}, \qquad z_0 = \frac{RT}{Mg} \approx 8\,\mathrm{km}$$

(c) Podobno kot pri prejšnji točki, toda sedaj je T odvisen od višine:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g = -\frac{pMg}{R(T_0 - \gamma z)}$$

$$\int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{Mg}{R}\int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{(T_0 - \gamma z)}$$

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{Mg}{RT_0\gamma}\ln\left(1 - \frac{\gamma z}{T_0}\right) = \ln\left[\left(1 - \frac{\gamma z}{T_0}\right)^{-\frac{Mg}{RT_0\gamma}}\right]$$

$$p = p_0\left(1 - \frac{\gamma z}{T_0}\right)^{-\frac{Mg}{RT_0\gamma}}$$

(d) $\star$ Adiabatna sprememba ($Q = 0$): $\mathrm{d}E = -p\,\mathrm{d}V$.

$$\mathrm{d}(pV) = p\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}p = \frac{mR}{M}\,\mathrm{d}T \to -p\,\mathrm{d}V = V\,\mathrm{d}p - \frac{mR}{M}\,\mathrm{d}T$$

$$\mathrm{d}E = mc_V\,\mathrm{d}T = V\,\mathrm{d}p - \frac{mR}{M}\,\mathrm{d}T$$

$$c_p = c_V + \frac{R}{M} \to mc_p\,\mathrm{d}T = V\,\mathrm{d}p$$

$$\rho c_p\,\mathrm{d}T = \mathrm{d}p = -\rho g\,\mathrm{d}z$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -\frac{g}{c_p} = -10\,\mathrm{K/km}}$$

V rešitvi smo v bistvu izvedli Legendrovo transformacijo in dobili entalpijo $H = E + pV$, za katero torej velja $\mathrm{d}H = \mathrm{d}E + p\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}p$ in $\mathrm{d}H = mc_p\,\mathrm{d}T$, iz česar tudi v splošnem za adiabatne spremembe neposredno sledi $mc_p\,\mathrm{d}T = V\,\mathrm{d}p$.

2. Diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti

Naloga 2.1 $\star$ **Neskončna potencialna jama.** Kjer je potencial neskončen, se delec ne more nahajati in tam je $\psi(x) = 0$. Rešujmo sedaj Schrödingerjevo enačbo na območju, kjer $V(x) = 0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = E\psi$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi = -k^2\psi, \text{ kjer } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi(x) = A\cos kx + B\sin kx$$

Ker mora biti valovna funkcija zvezna na robovih intervala $[0, a]$, je

$$0 = \psi(0^-) = \psi(0^+) = A\cos 0 + B\sin 0,$$

torej $A = 0$ in

$$B\sin ka = \psi(a^-) = \psi(a^+) = 0,$$

torej $ka = n\pi$ za $n \in \mathbb{N}$. Dovoljene energije so torej:

$$E = \frac{k^2\hbar^2}{2m} = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2ma^2}.$$

Vidimo, da kvantizacija naravno vstopi v kvantno mehaniko kot posledica Schrödingerjeve enačbe. Dovoljene valovne funkcije pa so na intervalu $[0, a]$ podane s sledečim izrazom:

$$\psi(x) = B\sin kx = B\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$

Določiti je potrebno še parameter B, kar naredimo tako, da normaliziramo valovno funkcijo:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x = |B|^2\int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x \overset{u=n\pi x/a}{=} |B|^2\frac{a}{n\pi}\int_0^{n\pi}\sin^2 u\,\mathrm{d}u = |B|^2\frac{a}{n\pi}\frac{n\pi}{2}$$

Velja torej $|B| = \sqrt{2/a}$. V splošnem je lahko B kompleksno število, torej je splošna rešitev podana z

$$B = \sqrt{\frac{2}{a}}e^{i\phi},$$

ker pa celokupna faza ϕ ne spremeni fizikalne realnosti (verjetnostne gostote, gibalne količine, pričakovanega položaja ...), jo lahko poljubno nastavimo: običajno kar na $\phi = 0$. Delec v neskončni potencialni jami lahko torej zavzame sledeča stanja s točno določenimi energijami, ki jih opišemo s kvantnim številom n:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2ma^2}$$

Naloga 2.2 ** **Pospešeno relativistično gibanje.** Definirajmo parameter

$$\tau_0 = \frac{mc}{qE},$$

ki ima enote časa. Imamo torej sledeči sklopljen sistem dveh diferencialnih enačb prvega reda:

$$\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}\tau} = \frac{u^1}{\tau_0}, \qquad \frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}\tau} = \frac{u^0}{\tau_0}.$$

Najlažje ga rešimo tako, da prvo enačbo odvajamo še enkrat po lastnem času τ in na desno stran vstavimo desno enačbo:

$$\frac{\mathrm{d}^2u^0}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\tau^2}u^0$$

Rešitev lahko zapišemo z uporabo eksponentnih funkcij, še raje pa z uporabo hiperboličnih funkcij:

$$u^0(\tau) = A\cosh\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) + B\sinh\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)$$

Delec spočetka miruje, tako da je $\gamma(0) = 1$ in $u^0(0) = \gamma(0)\,c = c$. Sledi $A = c$. Zgornji izraz odvajamo in dobimo tako u^1:

$$u^1(\tau) = c\sinh\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) + B\cosh\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right).$$

Na začetku $v = 0$, zato velja $u^1(0) = \gamma v = 0$, torej $B = 0$. Imamo torej

$$u^0(\tau) = c\cosh\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)$$

$$u^1(\tau) = c\sinh\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)$$

Za koordinatni čas dobimo:

$$t = \int_0^\tau \gamma\,\mathrm{d}\tau = \int_0^\tau \frac{u^0}{c}\,\mathrm{d}\tau = \tau_0\sinh\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)$$

Hitrost je torej:

$$\frac{v}{c} = \frac{u^1}{u^0} = \tanh\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) = \frac{\sinh\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)}{\sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)}} = \frac{t/\tau_0}{\sqrt{1+(t/\tau_0)^2}}$$

Prav res, $v(0) = 0$ in $v(\infty) = c$, kar tudi intuitivno pričakujemo.