Diferencialne enačbe

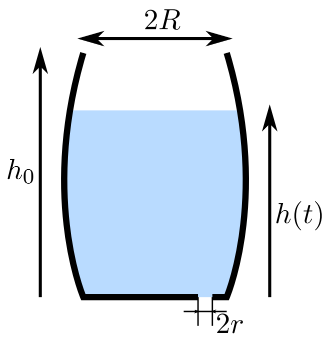
Naloge

PETER ANDOLŠEK

Marec 2025

1. Separabilne diferencialne enačbe prvega reda

Naloga 1.1 Sod (brez pokrova) s polmerom $R = 0{,}6\,\mathrm{m}$ in višino $h_0 = 1{,}2\,\mathrm{m}$ je do vrha napolnjen z vodo. Pri dnu izvrtamo vanj majhno luknjo polmera $r = 2\,\mathrm{cm}$. Kako se bo višina gladine spreminjala s časom in čez koliko časa se bo sod popolnoma izpraznil? Hitrost izhajajoče vode (po Bernoulliju) oceni z $v = \sqrt{2gh}$.



Naloga 1.2 **Zemljina atmosfera** je sestavljena iz permanentnih (dušik, kisik, argon) in variabilnih plinov (vodna para, ogljikov dioksid, metan, dušikov dioksid, ozon ...). Privzemi, da je povprečna molska masa zraka enaka $M = 28{,}96\,\mathrm{kg/kmol}$. Struktura atmosfere se na različnih časovnih skalah spreminja (kar nakazujejo vseprisotni vetrovi), vendar lahko pogosto predpostavimo, da je atmosfera v navpični smeri statična, kar imenujemo hidrostatično ravnovesje.

(a) Pokaži, da v hidrostatičnem ravnovesju velja:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g.$$

(b) Izpelji odvisnost tlaka od višine pri izotermni atmosferi, $T = \text{konst}$.

(c) Izpelji odvisnost tlaka od višine še pri atmosferi z enakomernim temperaturnim gradientom, $T = T_0 - \gamma z$.

(d) * Suh zrak se zaradi narivanja na orografsko pregrado dviguje in adiabatno ohlaja. S 1. zakonom termodinamike izračunaj $\mathrm{d}T/\mathrm{d}z$ za tak proces.

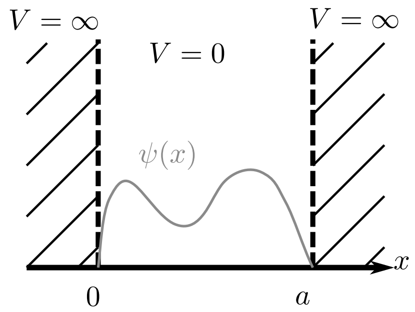
2. Diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti

Naloga 2.1 * **Neskončna potencialna jama.**
Določi dovoljene energije E in valovne funkcije $\psi(x)$, ki rešijo stacionarno Schrödingerjevo enačbo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\,\psi(x) = E\psi(x)$$

za neskončno potencialno jamo:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ \infty, & \text{sicer.} \end{cases}$$



Pri tem upoštevaj, da mora biti valovna funkcija $\psi(x)$ povsod zvezna. $|\psi(x)|^2$ predstavlja verjetnostno gostoto, katere integral po celem območju mora biti enak 1.

Naloga 2.2 ** **Pospešeno relativistično gibanje.**

Delec s homogenim električnim poljem E iz mirovanja pospešimo na velike hitrosti. Obravnavajmo tako gibanje v 2-dimenzionalnem prostorčasu (kjer imamo le čas t in krajevno koordinato x). Čas, ki ga s svojo uro meri pospešeni delec, imenujemo *lastni čas* τ. Čas, ki ga merimo opazovalci v laboratorijskem sistemu, imenujemo *koordinatni čas* t. Oba časa sta povezana prek relacije:

$$\mathrm{d}t = \gamma\, \mathrm{d}\tau\,,$$

kjer

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

kjer je $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ običajna hitrost (ki jo izmerimo v laboratorijskem sistemu). Delcu pripišemo krajevni 4-vektor:[1]

$$x^\mu = (ct, x),$$

ki se odvaja v 4-vektor hitrosti:

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} = (\gamma c, \gamma v).$$

Zaradi električnega polja se 4-vektor hitrosti povečuje tako:

$$\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}\tau} = \frac{qE}{mc} u^1,$$

$$\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}\tau} = \frac{qE}{mc} u^0.$$

Določi 4-vektor hitrosti v odvisnosti od lastnega časa, $u^\mu(\tau)$, nato uporabi $\gamma = u^0/c$ in s tem še izrazi koordinatni čas z lastnim časom: $t = \int \gamma\, \mathrm{d}\tau$. Nazadnje še izrazi običajno hitrost v v odvisnosti od koordinatnega časa t.

[1] Tukaj lahko μ zavzame indeksa 0 in 1: $x^0 = ct$, $x^1 = x$.