Odvodi
Rešitve

Peter Andolšek
Januar 2024

1. Definicija odvoda

Naloga 1.1

(a) $f'(x) = 0$
(b) $f'(x) = 1$
(c) $f'(y) = 2y$
(d) $f'(x) = 3x^2$
(e) $f'(x) = nx^{n-1}$
(f) $f'(t) = 10t - 1$
(g) $f'(\theta) = \cos\theta$

2. Računanje odvodov

Naloga 2.1 Izračunaj prve odvode sledečih funkcij:

(a) $f'(x) = 12x^3 - 21x^2 + b$
(b) $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} - \dfrac{3}{2x^{5/2}}$
(c) $f'(x) = \sin x + x\cos x$
(d) $f'(x) = \dfrac{|x|}{x}$
(e) $f'(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$
(f) $f'(x) = 2x\cos(x^2)$
(g) $v'(x) = 3ke^{3x}$
(h) $f'(x) = \dfrac{x^3 - 3x}{(x^2-1)^{3/2}}$
(i) $x'(t) = \dfrac{at}{\sqrt{at^2 - 3}}$
(j) $I'(\phi) = \dfrac{3}{9\phi^2 - 6\phi + 2}$
(k) $\theta'(z) = \dfrac{1}{\ln 10}\dfrac{10z - 1}{5z^2 - z}$
(l) $x'(t) = 5t(2\ln t + 1)$
(m) $f'(x) = -\sin\left(x^2e^x\right)\, xe^x(2+x)$
(n) $c'(\gamma) = \dfrac{ab\sin\gamma}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}}$

Naloga 2.2

(a)
$$f'(x) = 500x^{99} - 2 - 7x^{-2}; \quad f^{(100)}(x) = 5\cdot 100! + 7\cdot 100!\cdot x^{-101}$$

(b)
$$f'(x) = \frac{15}{2}\sqrt{x} + \frac{e\sqrt{\pi}}{2}x^{e/2-1} - 2x$$

(c)
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1; \quad \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = 0$$

(d)
$$p'(x) = -2xe^{-x^2}; \quad p''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$$

(e)
$$\dot{I}(t) = \frac{t}{t^2-1}; \quad \ddot{I}(t) = -\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2}$$

(f)
$$c'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad c''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(g)
$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\gamma} = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2} - \sin^2\gamma}}$$

3. Uporaba odvoda v matematiki

Naloga 3.1 $y = -4x - 1$

Naloga 3.2 $f'(x) = 3x^2 + x - 4$. Lokalna ekstrema sta $x = 1$ (maksimum) in $x = 4/3$ (minimum).

Naloga 3.3 $x = \pm\sigma$

Naloga 3.4

(a) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left[\frac{e^x}{x^2}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{e^x}{2x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{e^x}{2}\right] = \infty$

(b) $\displaystyle \lim_{w\to-4}\frac{\sin(\pi w)}{w^2-16} = \lim_{w\to-4}\frac{\pi\cos(\pi w)}{2w} = -\frac{\pi}{8}$

(c) $\displaystyle \lim_{z\to0}\frac{\sin(2z)+7z^2-2z}{z^2(z+1)^2} = \lim_{z\to0}\frac{2\cos(2z)+14z-2}{4z^3+6z^2+2z} = \text{ne obstaja}$

(d) $\displaystyle \lim_{t\to\infty}\left[t\ln\left(1+\frac{3}{t}\right)\right] = \lim_{x\to0^+}\left[\frac{\ln(1+3x)}{x}\right] = \lim_{x\to0^+}\left[\frac{3}{1+3x}\right] = 3$

(e) $\displaystyle \lim_{x\to1}\left[(x-1)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right] = \lim_{t\to0}\left[t\tan\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)\right] =$

$$= -\lim_{t\to0}\left[t\cot\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right] = -\lim_{t\to0}\left[\frac{t}{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\right] = -\lim_{t\to0}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)\cdot\frac{2}{\pi} = -\frac{2}{\pi}$$

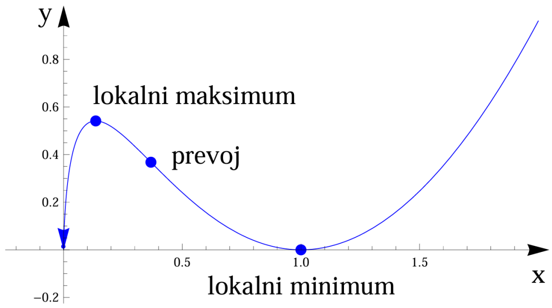
(f) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left[e^x+x\right]^{1/x} = \exp\left[\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right] = \exp\left[\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+1}{e^x+x}\right] = \exp(1) = e$

Naloga 3.5

(a) $\mathcal{D}_f = (0,\infty)$. Ko $x\to0$, $f\to0$. Ko $x\to\infty$, $f\to\infty$.
Ničla je v $x = 1$.

(b) $f'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x$.
Stacionarni točki: maksimum v $x = e^{-2}$ in minimum v $x = 1$. Interval naraščanja $(0, e^{-2}]\cup[1,\infty)$, interval padanja $[e^{-2}, 1]$.
Ko $x\to0$, $f'\to\infty$.
Ko $x\to\infty$, $f'\to\infty$.

(c) $f''(x) = \dfrac{2\ln x}{x} + \dfrac{2}{x}$.
Prevoj je v $x = e^{-1}$. Interval konkavnosti $(0, e^{-1}]$, interval konveksnosti $[e^{-1}, \infty)$.



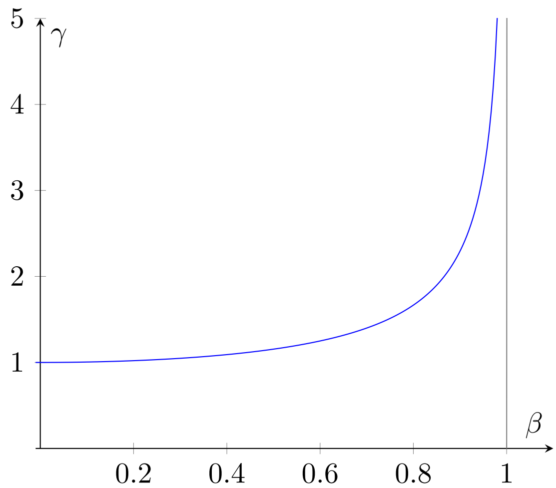
Naloga 3.6 $y'(x) = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$

4. Uporaba odvoda v fiziki

Naloga 4.1

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\beta} = \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}}$$

$\mathcal{D}_\gamma = (-1, +1)$, toda ker je hitrost vedno nenegativna, se omejimo na $[0, 1)$. Funkcija venomer narašča, poleg tega pa $\gamma'(0) = 0$, pri $\beta = 1$ pa naraste preko vseh mej. Velja še $\gamma(0) = 1$.



Naloga 4.2 Podobno kot pri kinematiki lahko trenutno hitrost reakcije izračunamo z odvodom:

$$v(t) = \dot{c}(t) = -kc_0e^{-kt} = -k\,c(t).$$

Kemiki sicer zahtevajo, da je hitrost vedno pozitivna (torej v našem primeru kc_0e^{-kt}), ampak to je precej nesmiselno, saj s tem izgubimo ključen podatek: ali se koncentracija snovi povečuje, ali se zmanjšuje.

Naloga 4.3 * Vpeljimo brezdimenzijski parameter

$$u = \frac{hc}{\lambda kT}$$

tako da se znebimo odvečnih konstant. Preostane nam:

$$B_\lambda = K\frac{u^5}{e^u - 1},$$

kjer je K sestavljena iz nekih konstant (njene vrednosti ne bomo potrebovali). Zahtevamo:

$$0 = \frac{\mathrm{d}B_\lambda}{\mathrm{d}u} = K\frac{5u^4(e^u-1) - u^5 e^u}{(e^u-1)^2}$$

Množimo z imenovalcem ulomka, nato pa terjamo, da mora biti preostali izraz $5u^4e^u - 5u^4 - u^5e^u$ enak 0. Preoblikujemo:

$$u = 5(1 - e^{-u})$$

To je transcendentna enačba in jo rešujemo iterativno. Dobimo

$$u = \frac{hc}{\lambda kT} = 4{,}965\,114\,232\ldots$$

Velja torej:

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{ku} = 2{,}897\,771\,955\ldots \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m\,K},$$

kar imenujemo *Wienova konstanta* k_W.

Naloga 4.4 Spomnimo se definicij:

$$B_\nu = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\nu}, \qquad B_\lambda = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\lambda}$$

Z verižnim pravilom lahko eno porazdelitev prevedemo v drugo, poleg tega pa vse pojavitve λ zamenjamo z c/ν.

$$B_\nu = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\nu} = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\nu} = B_\lambda\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\nu} = \frac{2h\nu^5}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}\cdot\frac{c}{\nu^2} = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}$$

Pri tem smo še uporabili:

$$\lambda = \frac{c}{\nu}; \qquad \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\nu} = -\frac{c}{\nu^2}$$

in zamolčali negativen predznak, ki izvira iz tega, da se pri višanju frekvence krajša valovna dolžina.

Naloga 4.5 Gostota svetlobnega toka, ki jo prejema rob ceste, je

$$j = \frac{P}{4\pi r^2}\cos\theta,$$

kjer je θ vpadni kót in r oddaljenost od svetilke. S skice razberemo:

$$\cos\theta = \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2/4}}; \qquad r = \sqrt{h^2 + a^2/4}.$$

Torej:

$$j(h) = \frac{P}{4\pi}\frac{h}{(h^2 + a^2/4)^{3/2}}$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}h} = \frac{P}{4\pi} \frac{(h^2 + a^2/4)^{3/2} - h \cdot \frac{3}{2}(h^2 + a^2/4)^{1/2} \cdot 2h}{[\cdots]}$$
$$(h^2 + a^2/4) - 3h^2 = 0$$
$$h = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

Naloga 4.6 (a) Naj bosta A' in B' pravokotni projekcij točk A in B na ogledalo. Naj bo C točka odboja. Označimo $|A'C| = x$. Minimizirati želimo čas, toda ker je hitrost konstantna, lahko minimiziramo razdaljo. Potem velja:

$$D(x) = r_1 + r_2 = \sqrt{a_1^2 + x^2} + \sqrt{a_2^2 + (b-x)^2}$$
$$0 = \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{\sqrt{a_1^2 + x^2}} - \frac{(b-x)}{\sqrt{a_2^2 + (b-x)^2}}$$
$$\frac{x}{r_1} = \frac{b-x}{r_2}$$

Sledi, da sta trikotnika $\triangle AA'C$ in $\triangle BB'C$ podobna, torej sta vpadni in odbojni kót enaka.

(b)

$$ct(x) = n_1 r_1 + n_2 r_2 = n_1\sqrt{a_1^2 + x^2} + n_2\sqrt{a_2^2 + (b-x)^2}$$
$$0 = \frac{\mathrm{d}(ct)}{\mathrm{d}x} = \frac{n_1 x}{\sqrt{a_1^2 + x^2}} - \frac{n_2(b-x)}{\sqrt{a_2^2 + (b-x)^2}}$$
$$n_1\frac{x}{r_1} = n_2\frac{b-x}{r_2}$$
$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

Naloga 4.7 * Naj bo višina vode x. Višina težišča je:

$$h^*(x) = \frac{2ma + \rho a^2 x^2/2}{5m + \rho a^2 x}$$
$$0 = \frac{\mathrm{d}h^*}{\mathrm{d}x} = \frac{\rho a^2 x(5m + \rho a^2 x) - (2ma + \rho a^2 x^2/2)\rho a^2}{[\cdots]}$$
$$0 = -2ma + 5mx + \rho a^2 x^2/2$$
$$0 = -2 + 5u + \mu u^2/2; \qquad u = x/a, \quad \mu = \rho a^3/m$$
$$u = \frac{-5 + \sqrt{25 + 4\mu}}{\mu}$$

Za $\mu \gg 1$ večino mase prispeva tekočina in zato pričakujemo, da bo težišče najnižje, ko bo na dnu čisto malo tekočine. Res, $\lim\limits_{\mu\to\infty} u = 0$.

Naloga 4.8 (*Mat. v fiz. in tehn.*). Zapišemo enačbi gibanja v x in y smeri:

$$D = v_0 t \cos\alpha$$
$$0 = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha + h$$

V 2. enačbo vstavimo 1. enačbo, da se znebimo t:

$$-\frac{gD^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + D\tan\alpha + h = 0$$

Parcialno odvajamo po α in upoštevamo $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\alpha} = 0$:

$$-\frac{2gD^2}{2v_0^2\cos^3\alpha}\sin\alpha + \frac{D}{\tan^2\alpha} = 0$$

$$D = \frac{v_0^2}{g\tan\alpha}$$

Dobljeni izraz sedaj vstavimo v 3. enačbo te rešitve:

$$\frac{-gv_0^2}{2\sin^2\alpha} + \frac{v_0^2}{g} + h = 0$$

Izrazimo α in se zavedamo, da se nahaja na intervalu $[0, \pi/2]$:

$$\alpha = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2(1 + gh/v_0^2)}}\right)$$

Res, ko je $h = 0$, dobimo znani rezultat $\alpha = 45°$.

Naloga 4.9 $\star$ Kosinusni izrek implicitno odvajamo po λ:

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\lambda}\cos\delta = \sin\epsilon\cos\beta\cos\lambda$$

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\sin\epsilon\cos\beta\cos\lambda}{\cos\delta} = \sin\epsilon\cos\alpha,$$

kjer smo v zadnjem koraku vstavili sinusni izrek.

Za rektascenzijo pa implicitno odvajamo sinusni izrek po λ:

$$-\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\sin\alpha\cos\delta - \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\lambda}\cos\alpha\sin\delta = -\cos\beta\sin\lambda$$

in vstavimo izraz za $\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\lambda}$,

$$-\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\sin\alpha\cos\delta - \sin\epsilon\sin\delta\cos^2\alpha = -\cos\beta\sin\lambda = -\sin\delta\sin\epsilon - \cos\delta\cos\epsilon\sin\alpha,$$

kjer smo v zadnjem koraku vstavili še sinusno kosinusni izrek, saj je tako končni rezultat elegantnejši. Enačbo preuredimo v

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\lambda} = \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta\sin\epsilon + \cos\epsilon.$$

Naloga 4.10 $\star\star$ Naj bo α kót med zveznico Sonce-Venera in Venera-Zemlja, $R_\mathrm{Z} = 1{,}00\,\mathrm{AU}$ radij Zemljine in $R_\mathrm{V} = 0{,}723\,\mathrm{AU}$ radij Venerine tirnice. Zanima nas delež osvetljene površine Venere. Navidezno površino lahko sestavimo iz polkroga in polelipse, kot kaže skica:

$$A = \frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R\,R\sin(90° - \alpha)}{2} = \frac{\pi R^2}{2}(1 + \cos\alpha).$$

Svetlobni tok je sorazmeren z navidezno površino (ker je površinska svetlost konstantna) in obratno sorazmeren s kvadratom oddaljenosti: $j \propto A/D^2$. Oddaljenost lahko izračunamo iz kosinusnega izreka $R_\mathrm{Z}^2 = R_\mathrm{V}^2 + D^2 - 2R_\mathrm{V}D\cos\alpha$, torej

$$\cos\alpha = \frac{R_\mathrm{V}^2 + D^2 - R_\mathrm{Z}^2}{2R_\mathrm{V}D}$$

$$\begin{aligned} j \propto \frac{A}{D^2} &= \frac{\pi R^2(1+\cos\alpha)}{2D^2} = \\ &= \frac{\pi R^2\left(1 + \frac{R_\mathrm{V}^2+D^2-R_\mathrm{Z}^2}{2R_\mathrm{V}D}\right)}{2D^2} \propto \\ &\propto \frac{2R_\mathrm{V}D + R_\mathrm{V}^2 + D^2 - R_\mathrm{Z}^2}{D^3} \end{aligned}$$

Če želimo dobiti ekstrem (v našem primeru maksimum), želimo, da je odvod enak 0.

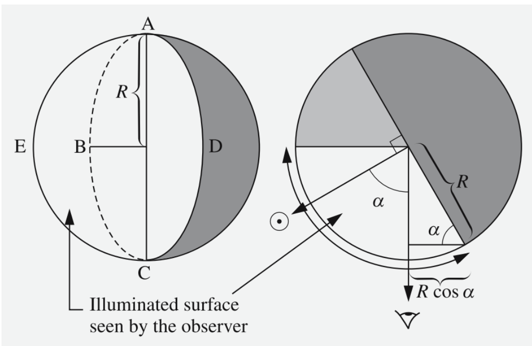
$$0 = \frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{(2D + 2R_\mathrm{V})D^3 - 3D^2(2R_\mathrm{V}D + R_\mathrm{V}^2 + D^2 - R_\mathrm{Z}^2)}{D^6}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2D^2 + 2R_\mathrm{V}D - 6R_\mathrm{V}D - 3R_\mathrm{V}^2 - 3D^2 + 3R_\mathrm{Z}^2 = \\ &= -(D^2 + 4R_\mathrm{V}D + 3R_\mathrm{V}^2 - 3R_\mathrm{Z}^2) \end{aligned}$$

$$D = -2R_\mathrm{V} \pm \sqrt{R_\mathrm{V}^2 + 3R_\mathrm{Z}^2}$$

Od tega je fizikalno veljavna rešitev le s pozitivnim predznakom, tako da dobimo $D = 0{,}431\,\mathrm{AU}$. Ostane nam le še uporaba kosinusnega izreka, da dobimo

$$\begin{aligned} \cos\epsilon &= \frac{R_\mathrm{Z}^2 + D^2 - R_\mathrm{V}^2}{2DR_\mathrm{Z}} \\ \epsilon &= 39{,}7^\circ \end{aligned}$$



5. Diferenciali

Naloga 5.1 Lahko preprosto odvajamo po običajnih pravilih in nazadnje množimo z diferencialom argumenta: $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$. Še bolje pa je dobiti občutek, kako uporabljati diferenciale same, kar naredimo z neposredno diferenciacijo:

(a) $\mathrm{d}f = \mathrm{d}(x^2) - \mathrm{d}\left((\cos x)^{-1}\right) = 2x\,\mathrm{d}x - (-\cos^{-2}x)(-\sin x)\,\mathrm{d}x = 2x\,\mathrm{d}x - \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\mathrm{d}w = e^{x^4-x^2+4x}\,\mathrm{d}(x^4 - x^2 + 4x) = e^{x^4-x^2+4x}(4x^3 - 2x + 4)\,\mathrm{d}x$

(c) $\mathrm{d}h = \mathrm{d}[\ln(2z)]\,\sin(2z) + \ln(2z)\,\mathrm{d}[\sin(2z)] = \frac{1}{2z}\cdot 2\mathrm{d}z\,\sin(2z) + \ln(2z)\cdot 2\cos(2z)\,\mathrm{d}z =$
$= \frac{\mathrm{d}z}{z}\sin(2z) + 2\ln(2z)\,\cos(2z)\,\mathrm{d}z$

Naloga 5.2

Koeficient linearnega raztezka: $\alpha = \frac{1}{l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}T}$.
Koeficient prostorninskega raztezka: $\beta = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}$.
Stisljivost: $\chi = -\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}$.
Prožnostni modul: $E = \frac{l}{S}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l}$.
Specifična toplota pri stalni prostornini: $c_V = \frac{1}{m}\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}\right)_V$. Pri tem $(\cdots)_V$ predstavlja vrednost izraza pri konstantni prostornini.

Naloga 5.3 Imamo $pV^\gamma = c$, od česar lahko vzamemo diferencial, da dobimo

$$\mathrm{d}p\,V^\gamma + p\gamma V^{\gamma-1}\,\mathrm{d}V = 0$$

Po preureditvi dobimo izraz za izentropno stisljivost:

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p} = \frac{1}{\gamma p}$$

Pri izotermni spremembi pa velja $pV = c$. Diferencial tega je $p\,\mathrm{d}V + \mathrm{d}p\,V = 0$, tako da dobimo za izotermno stisljivost:

$$\chi_T = -\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p} = \frac{1}{p} = \gamma\chi_S$$

Naloga 5.4 Težni pospešek zapišemo s formulo:

$$g(r) = \frac{GM}{r^2}$$

Za male spremembe Δr lahko spremembo Δg zapišemo s približkom tangente:

$$\Delta g = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}\Delta r = -\frac{2GM}{r^3}\Delta r$$

Za podatke $G = 6{,}674\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$, $M = 5{,}972\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R = 6400\,\mathrm{km}$ in $\Delta R = 100\,\mathrm{m}$ je s tangentnim približkom $\Delta g = 0{,}0304\,\mathrm{gal}$. Od točnega rezultata se razlikuje za le $23{,}4\,\mathrm{ppm}$, kar se pri naši natančnosti nikakor ne pozna. Uporabili smo enoto $1\,\mathrm{gal} = 0{,}01\,\mathrm{m/s^2}$ in simbol za *parts-per-million*: $1\,\mathrm{ppm} = 10^{-6}$.

Naloga 5.5 S podatki $G = 6{,}674\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$, $M = 5{,}972\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ in $t = 100\,\mathrm{min}$ dobimo s 3. Keplerjevim zakonom $a = 7140\,\mathrm{km}$. Sedaj namesto odštevanja skoraj enakih količin raje uporabimo diferenciale. Po 3. Keplerjevem zakonu:

$$a^3 = \frac{GM}{4\pi^2}t^2$$
$$3a^2\,\Delta a = \frac{GM}{4\pi^2}\cdot 2t\,\Delta t$$
$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{2}{3}\frac{\Delta t}{t}$$

Z $\Delta t = -1\,\mathrm{min}$ dobimo $\Delta a = -47{,}6\,\mathrm{km}$. Od prave razlike, ki jo dobimo z dejanskim odštevanjem, se razlikuje le za 1,67 ‰.

Naloga 5.6

(a) $\Delta y = 2|x|\,\Delta x$
(b) $\Delta h = |v|\,\Delta t$
(c) $\Delta D = \left|\frac{2v^2\cos(2\alpha)}{g}\right|\,\Delta\alpha$
(d) $\Delta v = \sqrt{\frac{g}{2h}}\,\Delta h$
(e) $\Delta s = |a\omega\sin(\omega t+\delta)|\,\Delta t$
(f) $\Delta r = Ae^x\Delta x$

6. Odvajanje vektorjev

Naloga 6.1 Prva količina je specifična kinetična energija planeta, druga pa njegova specifična vrtilna količina.

(a) $\ddot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}$
(b) $\dot{\mathbf{k}} = \dot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}}$

Z uporabljenim dejstvom:

$$\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}\times\left(-\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = 0.$$

To je ravno izrek o ohranitvi vrtilne količine oz. drugi Keplerjev zakon.

Naloga 6.2 Sprememba sile je

$$F(t+\mathrm{d}t) - F(t) = \mathrm{d}F = (A\omega\cos\omega t, 2Bt, C)\,\mathrm{d}t$$

7. Taylorjev razvoj

Naloga 7.1 Odvodi sinusa si zapovrsti sledijo: $f^{(0)}(x) = \sin x$, $f^{(1)}(x) = \cos x$, $f^{(2)}(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, ...

Ko pridemo ponovno do sinusa, se zaporedje ponovi, torej s periodo 4. Če zaporedje evaluiramo v 0, dobimo zaporedje 0, +1, 0, −1, 0, ...

Torej za sinus dobimo vsoto:

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \\ &= \frac{0}{0!}\cdot x^0 + \frac{1}{1!}\cdot x^1 + \frac{0}{2!}\cdot x^2 + \frac{-1}{3!}\cdot x^3 + \frac{0}{4!}\cdot x^4 + \cdots = \\ &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

Podobno, za kosinus dobimo vsoto:

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{1}{0!}\cdot x^0 + \frac{0}{1!}\cdot x^1 + \frac{-1}{2!}\cdot x^2 + \frac{0}{3!}\cdot x^3 + \frac{1}{4!}\cdot x^4 + \cdots = \\ &= \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\end{aligned}$$

Primer za e^x je še posebej preprost, saj vedno velja $f^{(n)}(x) = e^x$ in torej $f^{(n)}(0) = 1$. Sledi, da

$$\begin{aligned}e^x &= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

Naloga 7.2 Za strog dokaz n-tih odvodov bi v teh primerih lahko uporabili matematično indukcijo, toda tukaj se zadovoljimo s šibkejšo obravnavo in preprosto opazujemo vzorce. Bralec lahko za vajo naredi rigorozen induktivni dokaz.

(a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$, $f'''(x) = \frac{2\cdot 3}{(1-x)^4}$, ..., $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. Iz tega sledi, da $f^{(n)}(0) = n!$ in da je splošni člen enak $a_n = f^{(n)}(0)/n! = 1$. Taylorjev razvoj je tako

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

(b) V tem primeru je funkcija sama že Taylorjev razvoj, toda poskusimo iti po enakem postopku, kakor vsakič. $f(x) = 1 - x$, $f'(x) = -1$, vsi višji odvodi so enaki 0. Velja torej $f(0) = 1$ in $f'(0) = -1$, torej sta člena enaka $a_0 = f(0)/0! = 1$ in $a_1 = f'(0)/1! = -1$, kot smo pričakovali.

(c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = +\frac{2}{x^3}$, $f'''(x) = -\frac{2\cdot 3}{x^4}$, ..., $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$, torej $f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$. Splošni člen je podan z $a_n = f^{(n)}(1)/n! = (-1)^n$, torej

$$\frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k$$

(d) $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, ... Zatem so odvodi identični kot pri prejšnji točki, le zamaknjeni v sledečem smislu: za $n \geq 1$ velja $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$, torej $f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Za $n \geq 1$ velja torej $a_n = f^{(n)}(1)/n! = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ in $a_0 = 0$:

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-x)^k}{k}$$

Naloga 7.3 Za majhne x lahko funkcijo dobro približamo z Maclaurinovo vrsto. Pri tem potrebujemo $f(0) = 1$, $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ in $f'(0) = n$. Sledi zelo uporaben približek:

$$(1+x)^n \approx 1 + xn$$

Kadar to ne zadošča, moramo izrazu pridati še višje člene. Rezultat se imenuje *binomska vrsta*:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k,$$

kjer je $\binom{n}{k}$ posplošeni binomski simbol:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

Naloga 7.4 Gravitacijski pospešek od A je $GM/(R-r)^2$, od C pa GM/R^2. Njuna razlika je plimski pospešek:

$$a_\mathrm{p} = \frac{GM}{(R-r)^2} - \frac{GM}{R^2} = \frac{GM}{R^2}\left[\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-2} - 1\right] \approx \frac{GM}{R^2}\left[1 + \frac{2r}{R} - 1\right] = \frac{2GM}{R^3} r$$

Pri tem smo uporabili približek $(1+x)^n \approx 1 + nx$.

Opazujmo sedaj največji plimski pospešek neke točke na Zemlji zaradi Lune oz. Sonca. Velja $a_{\mathrm{p},☾} = 2GM_☾\, r/R_☾^3$ in $a_{\mathrm{p},\odot} = 2GM_\odot r/R_\odot^3$. Njuno razmerje je podano z

$$\frac{a_{\mathrm{p},☾}}{a_{\mathrm{p},\odot}} = \frac{2GM_☾\, r/R_☾^3}{2GM_\odot r/R_\odot^3} = \frac{M_☾}{M_\odot}\left(\frac{R_\odot}{R_☾}\right)^3 = 2{,}2$$

To pomeni, da ima Luna več kot dvakrat večji plimski vpliv na Zemljo kot Sonce.

8. Parcialni odvodi

Naloga 8.1 Velja $\frac{\partial T}{\partial a} = \alpha a^{\alpha-1} b^{\beta} c^{\gamma} = \alpha T/a$ in analogno tudi $\frac{\partial T}{\partial b} = \beta T/b$ ter $\frac{\partial T}{\partial c} = \gamma T/c$. Kot smo se naučili, lahko dobimo napako sestavljene količine s sledečo relacijo:

$$\Delta T = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial a}\Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial b}\Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial c}\Delta c\right)^2} = $$
$$= \sqrt{\left(\alpha\frac{\Delta a}{a}T\right)^2 + \left(\beta\frac{\Delta b}{b}T\right)^2 + \left(\gamma\frac{\Delta c}{c}T\right)^2}$$

Če na obeh straneh delimo s T, dobimo odgovor:

$$\frac{\Delta T}{T} = \sqrt{\left(\alpha\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\beta\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\gamma\frac{\Delta c}{c}\right)^2}$$

Relativne napake se torej (utežene s potencami njihovih količin) seštevajo v kvadraturi.

Pri $\omega = \sqrt{k/m} = k^{1/2} m^{-1/2}$ imamo tako:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \sqrt{\left(\frac{\Delta k}{2k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{2m}\right)^2}$$

Pri tem smo upoštevali, da $(-1)^2 = 1$, tako da nismo pisali negativnega predznaka.

Naloga 8.2

(a)

$$\nabla f = \begin{pmatrix} e^z \sin y \\ x e^z \cos y \\ x e^z \sin y \end{pmatrix}$$

(b)

$$\nabla f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Naloga 8.3 Implicitno parcialno odvajamo po x. Pri tem pazimo, da je $z = z(x, y)$ funkcija obeh parametrov:

$$2x \sin\left(y^3\right) + e^{3z} + x e^{3z} \cdot 3\frac{\partial z}{\partial x} + \sin\left(z^2\right) \cdot 2z\frac{\partial z}{\partial x} = -6\frac{\partial z}{\partial x}$$

Preuredimo in dobimo implicitno izražen parcialni odvod

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x\sin(y^3) + e^{3z}}{6 + 2z\sin(z^2) + 3xe^{3x}}$$

Podobno implicitno odvajamo po y:

$$x^2 \cos\left(y^3\right) \cdot 3y^2 + x e^{3z} \cdot 3\frac{\partial z}{\partial y} + \sin\left(z^2\right) \cdot 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 3 - 6\frac{\partial z}{\partial y}$$

Zopet preuredimo člene in dobimo

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3 - 3x^2y^2\cos(y^3)}{6 + 3xe^{3x} + 2z\sin(z^2)}$$

Naloga 8.4 Izračunamo oba mešana odvoda:

(a) $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^2 + \frac{12y^6}{x^4}\right) = 6x^2y + \frac{72y^5}{x^4}$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3y - \frac{24y^5}{x^3}\right) = 6x^2y + \frac{72y^5}{x^4}$

(b) $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\sin\left(\frac{x}{y^2}\right)\frac{1}{y} - 7x^6y^4\right) = \cos\left(\frac{x}{y}\right)\frac{x}{y^3} + \sin\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y^2} - 28x^6y^3$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin\left(\frac{x}{y}\right)\frac{x}{y^2} - 4x^7y^3 + 10y^9\right) = \cos\left(\frac{x}{y}\right)\frac{x}{y^3} + \sin\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y^2} - 28x^6y^3$

Naloga 8.5 Neposredno odvajanje v danem vrstnem redu bi nam utegnilo situacijo močno zakomplicirati. Po Schwarzevem izreku pa lahko parcialne odvode poljubno mešamo: potrebno je le, da odvajamo trikrat po x in štirikrat po y. Najprej odvajamo trikrat po x:

$$\begin{aligned} G &= y^4\sin(2x) + x^2(y^{10} + \cos\left(y^2\right))^7 \\ G_x &= 2y^4\cos(2x) + 2x(y^{10} - \cos\left(y^2\right))^7 \\ G_{xx} &= -4y^4\sin(2x) + 2(y^{10} - \cos\left(y^2\right))^7 \\ G_{xxx} &= -8y^4\cos(2x) \end{aligned}$$

Sedaj lahko le še odvajamo štirikrat po y:

$$G_{yyyxxxy} = G_{xxxyyyy} = -8\cdot 4!\cos(2x) = -192\cos(2x)$$

Naloga 8.6

(a) $\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = 2x\sin(6y)\,\mathrm{d}x + 6x^2\cos(6y)\,\mathrm{d}y$

(b) $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{y}\,\mathrm{d}y - \frac{3}{z}\,\mathrm{d}z$

Naloga 8.7 Najprej vstavimo $y = \sin(x^2)$. Sledi preprosto:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2\sin^4(x^2) - 2\sin\left(x^2\right)\right] &= 2x\sin^4(x^2) + x^2\cdot 4\sin^3(x^2)\cos\left(x^2\right)\cdot 2x - 2\cdot 2x\cos\left(x^2\right) = \\ &= 2xy^4 + 8x^3y^3\cos\left(x^2\right) - 4x\cos\left(x^2\right)\end{aligned}$$

Pri tem nazadnje zopet vstavili $\sin(x^2) = y$, lahko bi pa sicer tudi pustili vse izraženo z x.

Po drugem postopku uporabimo verižno pravilo z dejstvom, da $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x\cos(x^2)$:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy^4 + (4x^2y^3 - 2)\cdot 2x\cos\left(x^2\right) = 2xy^4 + 8x^3y^3\cos\left(x^2\right) - 4x\cos\left(x^2\right)$$

Oba totalna odvoda se res ujemata.

Naloga 8.8 ⋆

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} &= -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{-iE_nt/\hbar} = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\Psi \\ \frac{\partial\Psi}{\partial t} &= -iE_n/\hbar\,\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{-iE_nt/\hbar} = -iE_n/\hbar\,\Psi\end{aligned}$$

Rezultata vstavimo v Schrödingerjevo enačbo (na območju $(0, a)$, kjer $V = 0$):

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} \\ E_n &= \frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2ma^2}\end{aligned}$$