Limite
Naloge

Peter Andolšek
December 2024

1. Računanje limit

Naloga 1.1 Izračunaj vrednost
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$
pri $x = 1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}0001$. Kaj lahko iz tega sklepaš o limiti $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$?

Naloga 1.2 Izračunaj:

(a) $\lim\limits_{x\to 2}[x^3 - 2x^2 + 1]$

(b) $\lim\limits_{t\to -2}\left[\dfrac{t+2}{t^2-4}\right]$

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x-1}{x^2+x-2}\right]$

(d) $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{(6+h)^2-36}{h}\right]$

(e) $\lim\limits_{z\to 3}\left[\dfrac{z^2+3z+2}{z^3-5z^2+3z+9}\right]$

(f) $\lim\limits_{z\to 4}\left[\dfrac{\sqrt{z}-2}{z-4}\right]$

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x}{3-\sqrt{9-x}}\right]$

(h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+4x}-x\right]$

(i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-\sqrt{x^2-7x+2}\right]$

(j) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

(k) $\lim\limits_{x\to 0} x^{-1}$

(l) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1/(x+h)-1/x}{h}$

(m) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2-x}{-7x+2}$

2. Limite v fiziki

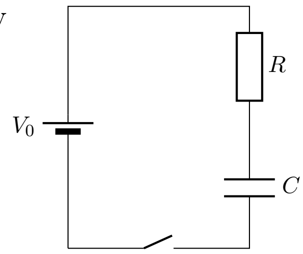
Naloga 2.1 Na hitro telo deluje zračni upor, ki je sorazmeren s kvadratom velikosti hitrosti telesa:
$$F_\mathrm{u} = -\frac{1}{2}C\rho A v^2\,,$$
kjer je C konstanta, ki je odvisna od geometrijskih lastnosti telesa, ρ gostota zraka, A prečni presek telesa in v njegova hitrost.

Na telo, ki prosto pada, delujeta sila teže in sila upora. Zapišimo Newtonov zakon (enačbo gibanja) za naš problem:
$$mg - \frac{1}{2}C\rho A v^2 = ma\,.$$
Če telo ob času $t = 0$ miruje, je rešitev te enačbe:
$$v(t) = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho A}}\tanh\left(gt\sqrt{\frac{C\rho A}{2mg}}\right)\,.$$

Težka žoga ($C = 0{,}47$, premer 23 cm, masa 0,57 kg) se zakotali iz mirujočega helikopterja ob času $t = 0$. Temperatura ozračja je $T = 20\,^\circ\mathrm{C}$, tlak pa je $P = 94{,}6\,\mathrm{kPa}$.

(a) S kakšno hitrostjo žoga pada po dolgem času?

(b) Po kolikšnem času doseže žoga 90 % terminalne hitrosti?



Naloga 2.2 Ob času $t = 0$ z baterijo (gonilna napetost $V_0 = 9\,\mathrm{V}$) zaporedno vežemo upornik (upor $R = 10\,\Omega$) in kondenzator (kapacitivnost $C = 50\,\mu\mathrm{C}$). Napetost na kondenzatorju v odvisnosti od časa podaja spodnja enačba:

$$V(t) = V_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

kjer je $\tau = RC$.

(a) Kolikšna je napetost po dolgem času na kondenzatorju?

(b) Po kolikšnem času bo razmerje napetosti na kondenzatorju in uporniku enako 2?

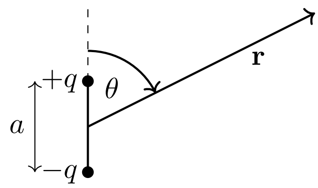
3. Asimptotsko obnašanje

Naloga 3.1 ⋆ Potencial na razdalji r od točkastega naboja q je podan z:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}.$$

Če imamo v prostoru več nabojev, je skupni potencial v neki točki podan z vsoto vseh prispevkov:

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n.$$



Naboj q leži na koordinatah $(0, 0, a/2)$, naboj $-q$ pa na $(0, 0, -a/2)$.
Kolikšen je potencial $V = V(r, \theta, \phi)$ v odvisnosti od sfernih koordinat? Kako je podan potencial na velikih razdaljah, $r \gg a$?
Namig: Ko je $\varepsilon \ll 1$, velja približno $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$.

Naloga 3.2 ⋆ Planckov zakon opisuje spektralno radianco črnega telesa pri temperaturi T:

$$B_\nu(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}.$$

Zapiši asimptotsko obnašanje funkcije B_ν v limiti $h\nu \ll kT$ (Wienov približek). Kako pa se obnaša B_ν v limiti $h\nu \gg kT$ (Rayleigh-Jeansov zakon)?

Namig: Taylorjeva razširitev eksponentne funkcije je:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$