Funkcije

Naloge

Peter Andolšek

November 2024

1. Lastnosti funkcij

Naloga 1.1

(a) $\mathbb{R}$

(b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

(c) $\mathbb{R} \setminus \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$

(d) $\mathbb{R} \setminus \left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$

(e) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

(f) $\mathbb{R}^+$

Naloga 1.2

	$f(x)$	surj.	inj.	bij.	sod.	lih.	nar.	pad.
(a)	x	✓	✓	✓	✗	✓	✓	✗
(b)	x^2	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗
(c)	$x^{3/2}$	✗	✓	✗	✗	✗	✓	✗
(d)	$\cos x$	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗
(e)	$\tan x$	✓	✗	✗	✗	✓	✗	✗
(f)	$10^x - 1$	✗	✓	✗	✗	✗	✓	✗
(g)	0	✗	✗	✗	✓	✓	✓	✓

Naloga 1.3

(a)

$$(f \circ g)(x) = e^{3x}$$

(b)

$$f^3(x) := (f \circ f \circ f)(x) = x$$

(c)

$$(f \circ g \circ h)(x) = \sin(2^x)$$

2. Krivulje

Naloga 2.1

(a) Oddaljenost je vedno enaka R, tako da imamo:

$$F(r, \phi) = R - r = 0\,.$$

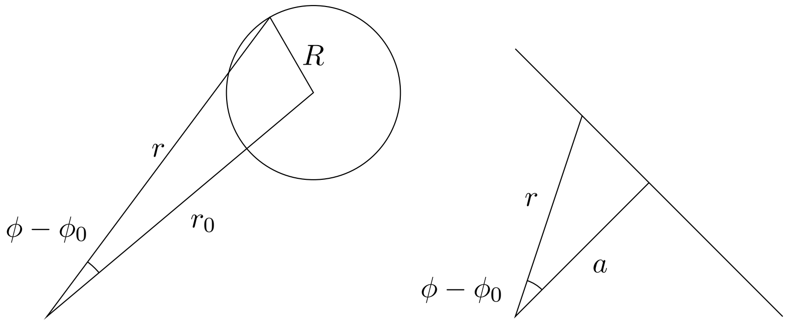
(b) ⋆ Narišemo skico in uporabimo kosinusni izrek, da zapišemo $R^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\phi - \phi_0)$. Implicitna oblika je torej:

$$F(r, \phi) = r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\phi - \phi_0) - R^2 = 0\,.$$

4

(c) Narišemo skico in uporabimo definicijo kosinusa, da zapišemo $r = a\cos(\phi - \phi_0)$. Velja torej:

$$F(r,\phi) = r - a\cos(\phi - \phi_0) = 0\,.$$



Naloga 2.2 (a) Naj bo $\overline{F_1T} = r$. Torej $\overline{F_2T} = 2a - r$. Sedaj pa uporabimo kosinusni izrek za kót $\angle TF_1F_2 = 180° - \phi$:

$$(2a-r)^2 = r^2 + (2ae)^2 - 2\cdot r\cdot 2ae\cos(180° - \phi)$$
$$4a^2 + r^2 - 4ar = r^2 + 4a^2e^2 + 4rae\cos\phi$$
$$r(1+e\cos\phi) = a(1-e^2)$$
$$\boxed{r(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\phi}}$$

(b) Naj ima T koordinati (x,y). Veljati mora:

$$\overline{F_1T} = 2a - \overline{F_2T}$$
$$\sqrt{(x-ae)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+ae)^2+y^2}$$
$$\cancel{x^2} + \cancel{a^2e^2} - 2xae + \cancel{y^2} = 4a^2 + \cancel{x^2} + \cancel{a^2e^2} + \cancel{y^2} + 2xae - 4a\sqrt{(x+ae)^2+y^2}$$
$$\sqrt{(x+ae)^2+y^2} = a + xe$$
$$x^2 + a^2e^2 + \cancel{2xae} + y^2 = a^2 + x^2e^2 + \cancel{2xae}$$
$$x^2(1-e^2) + y^2 = a^2(1-e^2)$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

(c) Kartezični koordinati sta s polarnima povezani tako:

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi\,.$$

Pretvorbi vstavimo v enačbo elipse in dobimo:

$$\frac{r^2\cos^2\phi}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\phi}{b^2} = r^2\left(\frac{\cos^2\phi}{a^2} + \frac{\sin^2\phi}{b^2}\right) = 1\,,$$

$$\boxed{r(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\phi}{a^2} + \dfrac{\sin^2\phi}{b^2}}}}\,.$$

3. Potenčna funkcija

Naloga 3.1 $v = 0{,}83c$, $t = 600\,\mathrm{s}$

Naloga 3.2 $L = 50\,\mathrm{L}_\odot$

4. Eksponentna funkcija

Naloga 4.1 (*Physics & Engineering of Radiation Detection*). $x = 66\,\mu\mathrm{m}$

Naloga 4.2 Pri FWHM/2 mora veljati:

$$\frac{1}{2} = \frac{f(\mathrm{FWHM}/2)}{f(0)} = e^{-\mathrm{FWHM}^2/(8\sigma^2)}$$

Torej:

$$\mathrm{FWHM} = 2\sqrt{2\ln 2}\,\sigma$$

Naloga 4.3 $\star$ Vemo, da $p_i = Ae^{-E_i/(kT)}$ za nek A, ki ga je potrebno določiti. Vsota vseh verjetnosti mora biti enaka 1:

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} Ae^{-E_i/(kT)} = A\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\hbar\omega/(2kT)-n\hbar\omega/(kT)} = Ae^{-\hbar\omega/(2kT)}\sum_{i=0}^{\infty}\left(e^{-\hbar\omega/(kT)}\right)^n$$

Neskončno vrsto lahko izračunamo z uvedbo spremenljivke $u = e^{-\hbar\omega/(kT)}$ in opazimo, da imamo opravka z geometrijsko vrsto.

$$1 = Ae^{-\hbar\omega/(2kT)}\sum_{i=0}^{\infty}\left(e^{-\hbar\omega/(kT)}\right)^n = Ae^{-\hbar\omega/(2kT)}\frac{1}{1-e^{-\hbar\omega/(kT)}}$$

Velja torej:

$$A = \frac{1-e^{-\hbar\omega/(kT)}}{e^{-\hbar\omega/(2kT)}} = e^{\hbar\omega/(2kT)} - e^{-\hbar\omega/(2kT)} = 2\sinh\frac{\hbar\omega}{2kT}$$

Verjetnost, da se delec nahaja v stanju z energijo E_i je torej:

$$p_i = Ae^{-E_i/(kT)} = 2\sinh\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)e^{-E_i/(kT)}$$

5. Trigonometrične funkcije

Naloga 5.1

$$\sin 3570^\circ = \sin(10\cdot 360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

Naloga 5.2

$$\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \frac{\cos\theta(1+\sin\theta)}{1-\sin^2\theta} = \frac{\cos\theta(1+\sin\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta\,.$$

Naloga 5.3

$$\begin{aligned}\cos(a+b)+i\sin(a+b) &= e^{i(a+b)} = \\ &= e^{ia}e^{ib} = \\ &= (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b) = \\ &= (\cos a\cos b - \sin a\sin b) + i(\sin a\cos b + \cos a\sin b)\end{aligned}$$

Če posebej pogledamo realni in imaginarni del, sta s tem dokazana oba adicijska izreka:

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

Če ju med sabo delimo:

$$\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \tan(a+b) = \frac{\sin a\cos b + \cos a\sin b}{\cos a\cos b - \sin a\sin b} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$$

Naloga 5.4

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha+\alpha) = \\ &= \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha = \\ &= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\cos\alpha\sin^2\alpha = \\ &= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha) = \\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,.\end{aligned}$$

Naloga 5.5 Velja:

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x\cos y + \cos x\sin y \\ \sin(x-y) &= \sin x\cos y - \sin\cos y\end{aligned}$$

Če obe zgornji enačbi seštejemo, dobimo:

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y$$

Na levi želimo imeti argumenta $\alpha = x+y$ in $\beta = x-y$, torej

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad y = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

Sledi:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

Naloga 5.6 Odgovor dobimo, če pri rešitvi prejšnje naloge vstavimo $\alpha = x$ in $\beta = y$.

Naloga 5.7 $\cos 2\alpha$ lahko zapišemo na več načinov:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

Če uporabimo predzadnjo oz. zadnjo izražavo, je s tem trditev iz naloge dokazana.

6. Inverzne trigonometrične funkcije

Naloga 6.1 Postavimo pravokotni trikotnik ABC s pravim kotom v C. Dolžina hipotenuze AB naj bo 1, dolžina stranice BC pa naj bo x. Velja, da je vsota dveh nepravih kotov v trikotniku enaka $\pi/2$. Če narišemo skico, vidimo, da je eden izmed kotov ravno $\arcsin x$, drugi pa $\arccos x$. Trditev je dokazana za poljubno dolžino stranice x, ki lahko zavzame poljubno pozitivno realno število. Kot rečeno, pa trditev na splošno velja za poljuben x.

Naloga 6.2 Množica rešitev je:

$$\mathcal{R} = \{\pm\sqrt{\arcsin 0{,}2 + 2n\pi} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\pm\sqrt{-\arcsin 0{,}2 + (2n+1)\pi} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$

7. Linearne transformacije

Naloga 7.1

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] + \frac{1}{2}$$