Funkcija

Naloge

Peter Andolšek

November 2024

1. Lastnosti funkcij

Naloga 1.1 Kadar realni funkciji realne spremenljivke eksplicitno ne zapišemo domene, se privzame, da imamo v mislih največjo tako domeno, kjer je funkcija sploh definirana. Določi največjo možno domeno $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}$ sledečih funkcij:

(a) $f(x) = x$

(b) $f(x) = x^{-2}$

(c) $f(x) = 1/\sin x$

(d) $f(x) = \tan x$

(e) $f(x) = (1+x)/(1-x^2)$

(f) $f(x) = \log x$

Naloga 1.2 Določi lastnosti (surjektivnost, injektivnost, bijektivnost, sodost, lihost, naraščajočnost, padajočnost) sledečim funkcijam $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, kjer je $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ največja domena, kjer je f lahko definirana.

	$f(x)$	surj.	inj.	bij.	sod.	lih.	nar.	pad.
(a)	x							
(b)	x^2							
(c)	$x^{3/2}$							
(d)	$\cos x$							
(e)	$\tan x$							
(f)	$10^x - 1$							
(g)	0							

Naloga 1.3 Zapiši kompozitume sledečih funkcij:

(a)
$$f(x) = e^x, \quad g(x) = 3x, \quad (f \circ g)(x) = ?$$

(b)
$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad (f \circ f \circ f)(x) = ?$$

(c)
$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = e^x, \quad h(x) = x \ln 2, \quad (f \circ g \circ h)(x) = ?$$

2. Krivulje

Naloga 2.1 Poišči implicitno polarno enačbo $F(r, \phi) = 0$ sledečih krivulj:

(a) Krog z radijem R s središčem v izhodišču.
(b) * Krog z radijem R s središčem s polarnimi koordinatami (r_0, ϕ_0).
(c) Premica, ki se izhodišču najbolj približa na kotu ϕ_0 in je tam od izhodišča oddaljena a.

Naloga 2.2 Naj bosta $F_1(ae, 0)$ in $F_2(-ae, 0)$ dve točki v ravnini, ki ju imenujemo *gorišči*. Elipsa z veliko polosjo a je definirana kot množica točk T, za katere je vsota razdalj $\overline{F_1T} + \overline{F_2T} = 2a$.

(a) Iz definicije izpelji polarno enačbo elipse iz njenega gorišča F_1:

$$r(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\phi}\,.$$

(b) Iz definicije elipse pokaži, da je kartezična enačba elipse podana z

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

kjer je $b = a\sqrt{1-e^2}$ mala polos elipse.

(c) S kartezično enačbo elipse pokaži, da je polarna enačba elipse iz središča podana z

$$r(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\phi}{a^2} + \dfrac{\sin^2\phi}{b^2}}}\,.$$

3. Potenčna funkcija

Naloga 3.1 V posebni teoriji relativnosti je Lorentzeva gama definirana s sledečim predpisom:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\,.$$

Opazujemo proton, ki mu izmerimo $\gamma = 1{,}8$. Kolikšna je hitrost protona? V kolikšnem času bi s takšno hitrostjo prišel od Zemlje do Sonca?

Naloga 3.2 Za zvezde glavne veje velja relacija:

$$L \propto M^{3{,}8}\,,$$

kjer je L izsev zvezde in M njena masa.

Kolikšen izsev ima zvezda glavne veje z maso $M = 2{,}8\,\mathrm{M}_\odot$? Rezultat izrazi v Sončevih izsevih.

4. Eksponentna funkcija

Naloga 4.1 (*Physics & Engineering of Radiation Detection*). V prosojnem mediju na razdalji x pade gostota svetlobnega toka j v skladu z relacijo:

$$j = j_0 e^{-\mu_t x}\,,$$

kjer je j_0 gostota svetlobnega toka pred medijem in μ_t linearni atenuacijski koeficient.

Določi debelino svinca, ki ga potrebujemo, da zmanjšamo količino rentgenskih žarkov z energijo 17,4 keV za faktor 10^4. Linearni atenuacijski koeficient svinca je $\mu_t = 1390\,\mathrm{cm}^{-1}$.

Naloga 4.2 Normaliziran Gaussov profil neke zvezde je

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}\,.$$

Kako se FWHM (*Full-Width at Half-Maximum*, širina funkcije pri polovični vrednosti) izraža s σ?

Naloga 4.3 * Enodimenzionalni harmonični oscilator je v kvantni mehaniki ekvivalent nihanja na prožni vzmeti v klasični mehaniki. Razlikuje se predvsem v tem, da so dovoljene energije podane z

$$E_n = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + n\right), \quad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Boltzmannov izrek pravi, da kadar je sistem v toplotnem ravnovesju z nekim rezervoarjem s temperaturo T, bo verjetnost, da se bo sistem nahajal v stanju z energijo E_i, sorazmerna z:

$$p_i \propto e^{-E_i/(kT)}\,,$$

kjer je $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K Boltzmannova konstanta.

Izračunaj (absolutno) verjetnost p_i, da se sistem nahaja v stanju z energijo E_i.

5. Trigonometrične funkcije

Naloga 5.1 Koliko je $\sin 3570°$?

Naloga 5.2 Pokaži veljavnost sledečega izraza:

$$\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta\,.$$

Naloga 5.3 S kompleksno definicijo sinusa in kosinusa izpelji adicijski izrek za sinus in kosinus. Iz obeh adicijskih izrekov pa še izpelji adicijski izrek za tangens.

Naloga 5.4 Z adicijskim izrekom za kosinus pokaži, da velja

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,.$$

Naloga 5.5 Z adicijskim izrekom za sinus pokaži veljavnost sledečega izraza:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,.$$

Naloga 5.6 Z adicijskim izrekom za sinus pokaži, da velja

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]\,.$$

Naloga 5.7 Pokaži, da velja:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

in

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\,.$$

6. Inverzne trigonometrične funkcije

Naloga 6.1 S tem, da opazuješ vsote kotov v pravokotnem trikotniku, pokaži, da za vse $x > 0$ velja:[1]

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}\,.$$

Naloga 6.2 Reši enačbo $\sin x^2 = 0{,}2$.

7. Linearne transformacije

Naloga 7.1 Natan na svoje meritve *fita* skalirani funkciji $\sin^2 x$ in $\sin x$. Presenečen opazi, da se oba *fita* enako dobro prilegata. Pokaži mu, da sta obe funkciji povezani z linearno transformacijo:

$$\sin^2 x = a\sin[b(x-c)] + d$$

in poišči parametre a, b, c in d.

[1] V resnici identiteta velja za vse $x \in \mathbb{R}$, ampak ni ideja naloge, da se ukvarjamo z matematičnimi detajli.