Vektorji

Teorija

Peter Andolšek

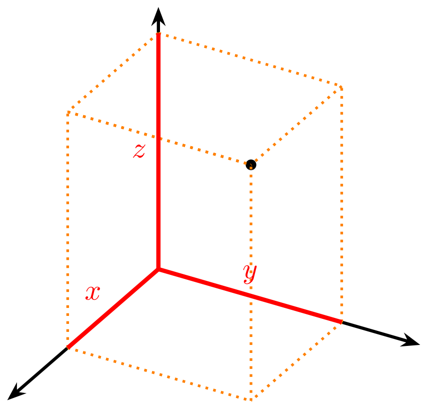
November 2024

1. Koordinatni sistemi

Naše dojemanje sveta je, da živimo v tridimenzionalnem svetu, kjer veljajo običajni geometrijski izreki (recimo, vsota notranjih kotov v trikotniku je enaka $180°$), čemur pravimo **tridimenzionalni evklidski prostor**. Vsako točko v takem prostoru lahko določimo z urejeno trojico števil, ki jih imenujemo **koordinate**. Da vemo, kaj urejena trojica koordinat predstavlja, je potrebno prej izbrati ustrezni koordinatni sistem.

1.1 Kartezični koordinatni sistem

Najpreprostejši koordinatni sistem je **kartezični**. Sestavljajo ga tri osi (x, y in z), ki so med seboj pravokotne. Uporabljamo **desnosučni** koordinatni sistem, kar pomeni, da mora x os kazati v smeri kazalca, y v smeri sredinca in z os v smeri palca, ko držimo desno roko v položaju za pravilo desne roke. Koordinate x, y in z so prikazane na sliki 1.



Slika 1: **Kartezični koordinatni sistem**

Ker je kartezični koordinatni sistem tako preprost, se bomo nanj pogosto sklicevali. Mnogokdaj pa je privlačneje uporabiti primernejše koordinatne sisteme, kot sta recimo sferični in cilindrični koordinatni sistem.

1.2 Sferični koordinatni sistem

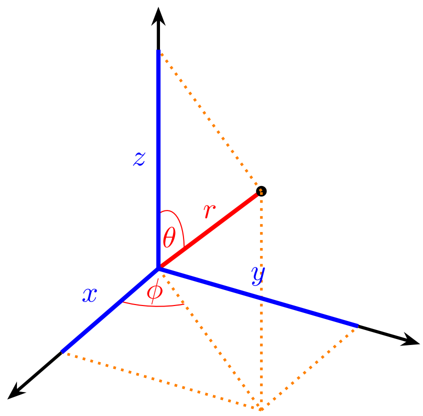
Sferične koordinate so (r, θ, ϕ):

- $0 \leq r < \infty$ je *oddaljenost* od izhodišča,
- $0 \leq \theta \leq \pi$ je *polarni kót* (kót, ki ga oklepata krajevni vektor točke in z os),

- $0 \leq \phi < 2\pi$ je *azimutni kót* (kót, ki ga oklepata projekcija krajevnega vektorja točke na ravnino xy in x os).

Povezavo s kartezičnimi koordinatami lahko odčitamo s slike 2:

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad z = r\cos\theta \tag{1.1}$$



Slika 2: **Sferični koordinatni sistem.**

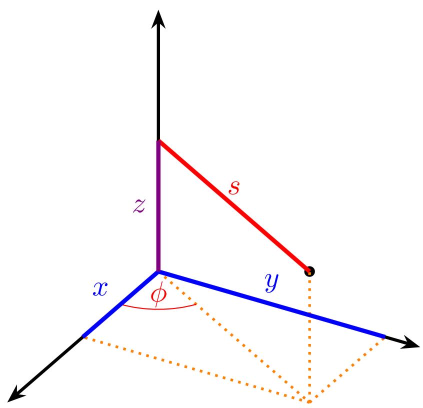
1.3 Cilindrične koordinate

Cilindrične koordinate so (s, ϕ, z):

- $0 \leq \phi < 2\pi$ ima enak pomen, kot v sferičnih koordinatah,
- $-\infty < z < \infty$ ima enak pomen, kot v kartezičnih koordinatah,
- $0 \leq s < \infty$ je oddaljenost točke od z osi.

Pretvorba s kartezičnimi koordinatami je razvidna s slike 3:

$$x = s\cos\phi, \qquad y = s\sin\phi, \qquad z = z \tag{1.2}$$



Slika 3: **Cilindrični koordinatni sistem**

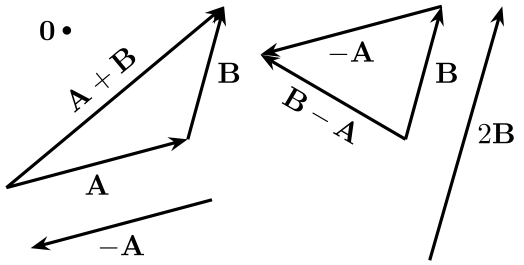
2. Vektorji

Če želimo dobro razumeti tridimenzionalni svet, nam preproste številske strukture ne zadoščajo. V naš nabor matematičnih orodij bi radi vnesli strukture, ki imajo geometrijsko predstavo, lahko pa se jih obvlada tudi numerično. To so *vektorji*.

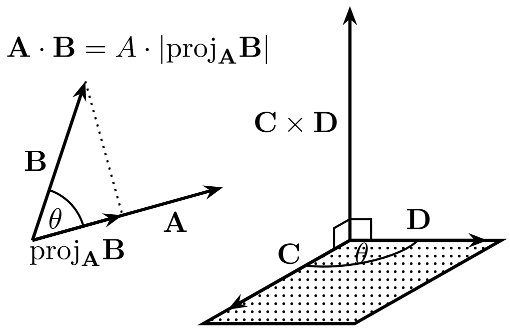
2.1 Geometrijski pogled

Vektor je geometrijski objekt, ki ima *velikost* in *smer*. Zaznamujemo ga z mastno črko $\mathbf{A}$, v rokopisih pa običajno z vektorskim znakom $\vec{A}$. Za razliko od vektorja ima **skalar** le velikost.

Velikost vektorja $\mathbf{A}$ zaznamujemo z $|\mathbf{A}|$ ali preprosto A. Vektor z velikostjo 1 imenujemo **enotski vektor** in ga zaznamujemo s kapico $\hat{\mathbf{A}}$, vektor z velikostjo 0 pa je **ničelni vektor** $\mathbf{0}$. **Nasprotni vektor** $(-\mathbf{A})$ ima enako velikost kot $\mathbf{A}$, toda ravno nasprotno usmerjenost. Ko vektorje prikazujemo s puščicami, jih lahko poljubno vzporedno premikamo, saj se s tem ne spreminja njihova velikost ali smer in je to še vedno isti vektor. Definiramo štiri vrste operacij, ki so prikazane na slikah 4 in 5.



Slika 4: **Vektorska aritmetika**



Slika 5: **Skalarni in vektorski produkt**

Seštevanje dveh vektorjev: Začetek vektorja $\mathbf{B}$ položimo na puščico vektorja $\mathbf{A}$. Vsota $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ je vektor, ki ga dobimo, če povežemo začetek vektorja $\mathbf{A}$ s puščico premaknjenega vektorja $\mathbf{B}$. Seštevanje je komutativno $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$ in asociativno $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$. Odštevanje definiramo s tem, da prištejemo nasprotni vektor: $\mathbf{A}-\mathbf{B} = \mathbf{A}+(-\mathbf{B})$.

Množenje s skalarjem: Množenje vektorja s pozitivnim skalarjem a poveča velikost vektorja za faktor a, toda ohrani smer. Če je a negativen, se velikost poveča $|a|$-krat in se vektor obrne. Množenje s skalarjem je distributivno: $a(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = a\mathbf{A}+a\mathbf{B}$.

Skalarni produkt: Skalarni produkt dveh vektorjev je skalar in je definiran z

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} := AB\cos\theta, \tag{2.1}$$

kjer je θ kót med njima. Je komutativen $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ in distributiven $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$. Geometrijsko gledano je $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ produkt A z velikostjo projekcije $\mathbf{B}$ na $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A\cdot|\mathrm{proj}_{\mathbf{A}}\mathbf{B}|\,. \tag{2.2}$$

Če sta dva vektorja vzporedna, je $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=AB$. V posebnem primeru velja torej

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=A^2\,. \tag{2.3}$$

Če sta $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ pravokotna, velja $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$.

Vektorski produkt: Vektorski produkt dveh vektorjev je definiran z

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}:=AB\sin\theta\,\hat{\mathbf{n}}\,. \tag{2.4}$$

$\hat{\mathbf{n}}$ je enotski vektor, ki kaže pravokotno na ravnino, ki vsebuje $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$. Ker sta tako možna dva enotska vektorja, rešimo dvoumnost s *pravilom desne roke*: kazalec usmerimo v smeri vektorja $\mathbf{A}$, sredinec v smeri $\mathbf{B}$ in pogledamo smer palca, ki nam kaže smer $\hat{\mathbf{n}}$. Vektorski produkt je distributiven $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}$ in *antikomutativen* $(\mathbf{B}\times\mathbf{A})=-(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$. Geometrijsko gledano je $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$ površina paralelograma, ki ga oklepata $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$. Iz definicije sledi, da

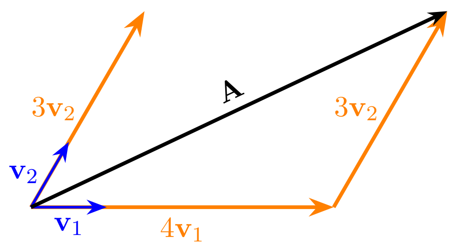
$$\mathbf{A}\times\mathbf{A}=\mathbf{0}\,. \tag{2.5}$$

2.2 Linearna kombinacija in neodvisnost

Linearna kombinacija vektorjev $\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_k$ je izraz oblike

$$\mathbf{v}=m_1\mathbf{r}_1+\cdots+m_k\mathbf{r}_k;\quad m_1,\ldots,m_k\in\mathbb{R}\,. \tag{2.6}$$

Intuitivno si linearno kombinacijo predstavljamo kot množico vseh vektorjev, ki se jih da sestaviti iz danih vektorjev z množenjem s skalarjem in seštevanjem vektorjev, kot je prikazano na sliki 6.



Slika 6: **Vsak vektor v ravnini lista lahko zapišemo kot linearno kombinacijo navedenih vektorjev $\mathbf{v}_1$ in $\mathbf{v}_2$. Prikazan primer za $\mathbf{A}=4\mathbf{v}_1+3\mathbf{v}_2$.**

Množica vektorjev $\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_k$ je **linearno neodvisna**, če nobenega izmed njih ne moremo zapisati kot linearno kombinacijo ostalih.

Pogoj za linearno neodvisnost: Množica vektorjev $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_k$ je linearno neodvisna, če in samo če je rešitev sledeče enačbe lahko le $a_1 = \cdots = a_k = 0$:

$$a_1\mathbf{r}_1 + a_2\mathbf{r}_2 + \cdots + a_k\mathbf{r}_k = \mathbf{0} \tag{2.7}$$

Če množica vektorjev $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ *pokrije prostor* (se da vsak vektor iz prostora zapisati kot njihovo linearno kombinacijo) in so linearno neodvisni, potem to množico imenujemo **baza prostora**. Število baznih vektorjev v danem prostoru je enolično določeno in ga imenujemo *dimenzija prostora n*.

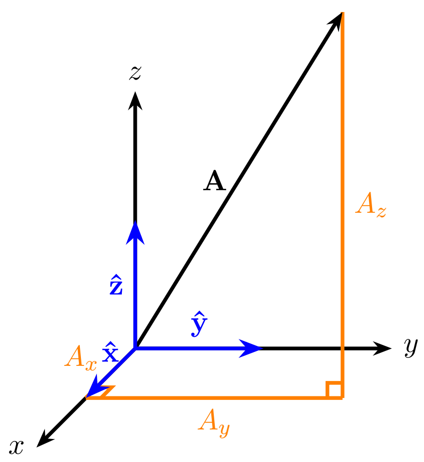
2.3 Komponente

Vektorji so sami po sebi geometrijske strukture. Za namene numeričnih izračunov pa jih lahko razpišemo v **vektorske komponente**:

$$\boxed{\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}} \tag{2.8}$$

Pri tem so $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ in $\hat{\mathbf{z}}$ trije bazni vektorji. Od sedaj naprej privzamemo, da so *ortonormalni*:

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 1; \qquad \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0. \tag{2.9}$$



Slika 7: **Komponente vektorja $\mathbf{A} = 1\,\hat{\mathbf{x}} + 2\,\hat{\mathbf{y}} + 3\,\hat{\mathbf{z}}$ v ortonormalni bazi.**

Komponente lahko na kratko zapišemo tudi v obliki stolpca ali vrstice:

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}} = (A_x, A_y, A_z) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Če enačbo 2.8 skalarno množimo z baznim vektorjem $\hat{\mathbf{x}}$, nam ostane

$$\boxed{A_x = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}} \tag{2.11}$$

Analogno velja tudi za $\hat{\mathbf{y}}$ in $\hat{\mathbf{z}}$. Pri tem smo uporabili ortonormalnost vektorjev.

Sedaj lahko vektorske operacije z uporabo lastnosti vektorjev zapišemo s komponentami:

Seštevanje dveh vektorjev: Preprosto seštejemo komponenti vsakega vektorja.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}+\mathbf{B} &= (A_x\hat{\mathbf{x}}+A_y\hat{\mathbf{y}}+A_z\hat{\mathbf{z}})+(B_x\hat{\mathbf{x}}+B_y\hat{\mathbf{y}}+B_z\hat{\mathbf{z}}) = \\ &= (A_x+B_x)\hat{\mathbf{x}}+(A_y+B_y)\hat{\mathbf{y}}+(A_z+B_z)\hat{\mathbf{z}}\end{aligned} \tag{2.12}$$

Množenje s skalarjem: Vsako komponento posebej množimo s skalarjem:

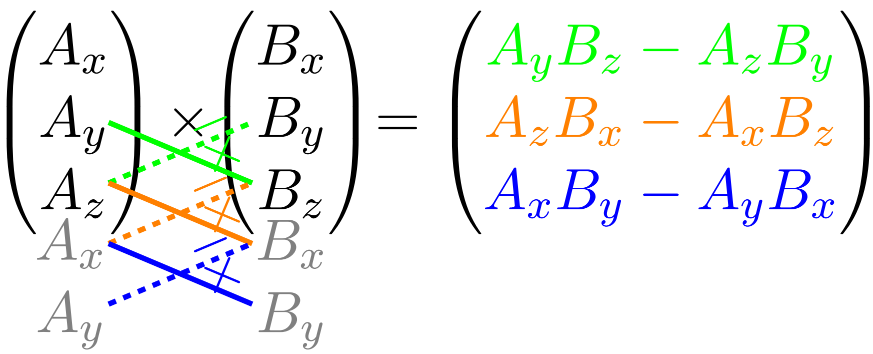
$$\begin{aligned}a\mathbf{A} &= a(A_x\hat{\mathbf{x}}+A_y\hat{\mathbf{y}}+A_z\hat{\mathbf{z}}) = \\ &= (aA_x)\hat{\mathbf{x}}+(aA_y)\hat{\mathbf{y}}+(aA_z)\hat{\mathbf{z}}\end{aligned} \tag{2.13}$$

Skalarno množenje: i-ti komponenti obeh vektorjev zmnožimo in jih seštejemo:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (A_x\hat{\mathbf{x}}+A_y\hat{\mathbf{y}}+A_z\hat{\mathbf{z}})\cdot(B_x\hat{\mathbf{x}}+B_y\hat{\mathbf{y}}+B_z\hat{\mathbf{z}}) = \\ &= A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\end{aligned} \tag{2.14}$$

Posledica $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=A^2$ je torej, da velikost vektorja izračunamo z

$$A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2} \tag{2.15}$$



Slika 8: **Mnemonika za vektorsko množenje. Najprej prepišemo komponenti x in y. Nato zmnožimo obe komponenti, ki sta povezani z debelo zeleno črto, in odštejemo zmnožek komponent, ki sta povezani s črtkano zeleno črto: to je x komponenta. Postopek ponovimo za komponenti y (oranžna) in z (modra).**

Vektorsko množenje: To množenje ima najtežje pravilo:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= (A_x\hat{\mathbf{x}}+A_y\hat{\mathbf{y}}+A_z\hat{\mathbf{z}})\times(B_x\hat{\mathbf{x}}+B_y\hat{\mathbf{y}}+B_z\hat{\mathbf{z}}) = \\ &= (A_yB_z-A_zB_y)\hat{\mathbf{x}}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{\mathbf{y}}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{\mathbf{z}}\end{aligned} \tag{2.16}$$

To sledi iz identitet med baznimi vektorji (ki sledijo iz geometrijske definicije), kot so recimo $\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{x}}=0$ in $\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{y}}=-\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{z}}$. Komponente vektorskega produkta le navidezno nimajo vzorca: uporabna mnemonika je prikazana na sliki 8. Rezultat lahko kompaktno zapišemo z determinanto:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \tag{2.17}$$

Ker je vektorski produkt zopet vektor, ga lahko skalarno oz. vektorsko množimo še s tretjim vektorjem, čemur pravimo *trojni produkt.*

Skalarni trojni produkt: $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$. Geometrijsko je $|\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})|$ prostornina paralelepipeda s stranicami $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ in $\mathbf{C}$, saj je $|\mathbf{B} \times \mathbf{C}|$ površina osnove, $|\mathbf{A} \cos\theta|$ pa višina, kjer je θ kót med $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$. Sledi,

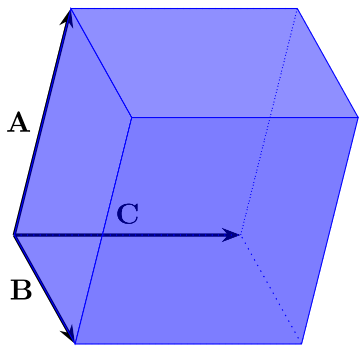
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \tag{2.18}$$

Pri tem se mora ohraniti abecedni red, saj imajo obratni izrazi nasproten predznak, na primer

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) \tag{2.19}$$

Zamenjamo pa lahko vektorski in skalarni produkt, če smo pozorni na oklepaje:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \tag{2.20}$$



Slika 9: **Prikaz trojnega skalarnega produkta. Označen je paralelepiped (telo s paroma vzporednimi šestimi ploskvami), ki ga oklepajo vektorji A, B in C. Prostornina tega paralelepipeda je $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$. Ker je kót med $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ in A manjši od $90°$, je njun skalarni produkt res pozitiven. Če bi izračunali $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$, bi dobili ravno nasproten predznak. Ker je ploščina neodvisna od tega, katera vektorja vzamemo za osnovo (pri čemer pazimo na predznake), velja recimo $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$.**

Vektorski trojni produkt: Ta primer se da lepo poenostaviti:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \tag{2.21}$$

Seveda, trojni produkt na levi strani bo pravokoten na $\mathbf{A}$ in pravokoten na pravokotnico na $\mathbf{B}$ in $\mathbf{C}$, torej ga lahko razstavimo na vektorja $\mathbf{B}$ in $\mathbf{C}$.

Podobno lahko poenostavimo tudi *višje vektorske produkte*, na primer

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \tag{2.22}$$

$$\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] = \mathbf{B}[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{C} \times \mathbf{D}) \tag{2.23}$$

2.4 Enačba premice

Z vektorji lahko predstavimo še mnogo drugih geometrijskih struktur. Osredotočimo se na premice v prostoru, ki služijo kot temeljen primer in jih tudi najpogosteje zasledimo.

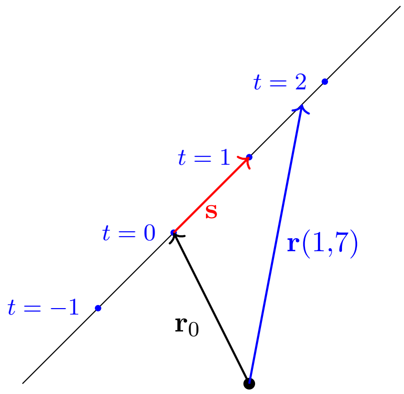
Spomnimo se, da lahko premico definiramo z dvema točkama, ki naj bosta $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$. Ideja je v tem, da vse točke $\mathbf{P}$ na tej premici zadoščajo sledeči enakosti:

$$(\mathbf{P} - \mathbf{A}) = t(\mathbf{B} - \mathbf{A}),\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Namreč, točke na premici so kolinearne. Sedaj definirajmo **začetni vektor** $\mathbf{r}_0 := \mathbf{A}$ in **vektor hitrosti** $\mathbf{s} := \mathbf{B} - \mathbf{A}$.[1] Zgornjo enačbo lahko preoblikujemo v spodnjo obliko, ki jo imenujemo **vektorska enačba premice**:

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{s}\,.} \tag{2.24}$$

Pri tem je t parameter, ki zavzame poljubno realno vrednost.



Slika 10: **Premica, ki jo predstavimo z začetnim vektorjem $\mathbf{r}_0$ in vektorjem hitrosti $\mathbf{s}$.**

Vektorsko enačbo lahko seveda razpišemo po komponentah, ki jih poimenujmo tako:

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \qquad \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \qquad \mathbf{s} = (\alpha, \beta, \gamma)\,. \tag{2.25}$$

S tem dobimo **parametrično enačbo premice**:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha t \\ y &= y_0 + \beta t \\ z &= z_0 + \gamma t \end{aligned}} \tag{2.26}$$

Pri vsaki izmed teh enačb lahko (če kakšna izmed količin α, β ali γ ni enaka 0) izrazimo parameter t, recimo $t = (x - x_0)/\alpha$. Za neko točko na premici mora biti parameter t v vsaki vrstici enak, torej velja:

$$t = \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}\,.$$

S tem smo dobili **kanonično enačbo premice**, ki ji zadoščajo vse točke (x, y, z), ki ležijo na premici:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}\,.} \tag{2.27}$$

[1] Takšno poimenovanje izhaja iz tega, da si predstavljamo delec, ki je ob času $t = 0$ v $\mathbf{r}_0$ in se nato premika s konstantno hitrostjo $\mathbf{s}$. Tak delec ravno oriše premico.