Kompleksna števila

Teorija

Peter Andolšek

Oktober 2024

Kompleksna števila v fiziki močno poenostavijo določene probleme. Obsežno se uporabljajo pri obdelavi nihanj in elektromagnetizmu, saj skrajšajo pisanje in olajšajo izračune, v kvantni mehaniki pa brez kompleksnih števil sploh ne gre, saj je kompleksna tudi osnovna enačba kvantne mehanike.

1. Imaginarna enota

Pogosto kompleksna števila motiviramo s tem, da želimo koreniti tudi negativna števila. Drugače rečeno, želimo rešiti enačbo oblike

$$x^2 = -a, \quad a \in \mathbb{R}^+ .$$

Zavedamo se, da taka enačba znotraj realnih števil ni rešljiva, zato bo potrebno uvesti neko novo število. To je **imaginarna enota** i (v elektrotehniki se uporablja j), ki je (ena od dveh) rešitev enačbe

$$x^2 = -1 . \tag{1.1}$$

Druga rešitev je seveda $-i$. Če množimo i s samim s sabo, je rezultat periodičen s periodo 4:

...	i^{-5}	i^{-4}	i^{-3}	i^{-2}	i^{-1}	i^0	i^1	i^2	i^3	i^4	i^5	...
...	$-i$	-1	$-i$	1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	$-i$	...

Velja torej $i = \sqrt{-1}$. Z uvedbo imaginarne enote lahko korenimo tudi ostala negativna števila:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{-1}\sqrt{a} = i\sqrt{a}, \quad a \in \mathbb{R}^+ .$$

Splošno število oblike ia, $a \in \mathbb{R}$ imenujemo **imaginarno število**.

2. Kompleksna števila

2.1 Algebrska oblika

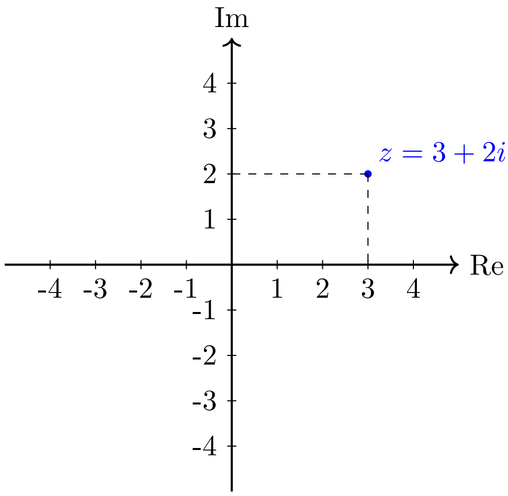
Če seštejemo poljubno realno in imaginarno število, dobimo **kompleksno število** oblike

$$z = a + bi; \quad a, b \in \mathbb{R} . \tag{2.1}$$

Število a imenujemo **realni del** in število b **imaginarni del**:

$$a = \mathrm{Re}(z), \quad b = \mathrm{Im}(z) . \tag{2.2}$$

Množico kompleksnih števil označujemo s $\mathbb{C}$. Poljubno kompleksno število lahko predstavimo kot točko oz. vektor na **kompleksni ravnini**, kjer na absciso nanesemo realni del, na ordinato pa imaginarni del. Število $3 + 2i$ geometrijsko predstavimo takole:



Kompleksni števili sta enaki, kadar sta enaka njuna realna in imaginarna dela. Relaciji *večji* in *manjši* za kompleksna števila nista definirani.

Zapisu $z = a + bi$ pravimo **algebrska oblika** kompleksnega števila. Zelo je primerna za seštevanje in odštevanje dveh kompleksnih števil:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i\,. \tag{2.3}$$

Brez problema pa lahko tudi množimo, kjer upoštevamo, da $i^2 = -1$:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + i(ad + bc)\,. \tag{2.4}$$

Pri deljenju uporabimo trik, pri katerem števec in imenovalec množimo s $c - di$:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,. \tag{2.5}$$

2.2 Kompleksni konjugat

Trik se pojavlja tako pogosto, da definiramo **konjugat** kompleksnega števila kot število, ki ima enak realni, toda nasprotni imaginarni del. Označimo ga z zvezdico. Če je $z = a + bi$, potem je njegov konjugat enak:

$$\boxed{z^* = a - bi\,.} \tag{2.6}$$

Geometrijsko sta konjugirani kompleksni števili simetrični na realno os. Če velja $a + bi = c + di$, potem mora veljati tudi $a - bi = c - di$ (saj sta kompleksni števili enaki natanko tedaj, ko sta enaka njuna realna in imaginarna dela). To pomeni, da lahko konjugiramo celotno enačbo in bo še vedno veljala. Konjugirano enačbo lahko dobimo tako, da zamenjamo predznak vsem i-jem in zapišemo konjugirane vrednosti vseh kompleksnih količin.

Za primer vzemimo Schrödingerjevo enačbo, kjer so vse količine realne, razen imaginarne enote i in valovne funkcije Ψ:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V(x)\,\Psi\,.$$

Preprosto zamenjamo predznak vsem imaginarnim enotam i in vsem kompleksnim količinam dodamo zvezdice. Konjugirana Schrödingerjeva enačba je tako:

$$-i\hbar\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2} + V(x)\,\Psi^*\,.$$

S konjugati dobimo tudi uporabne identitete. Velja namreč

$$\mathrm{Re}\,z = \frac{z+z^*}{2}\,, \tag{2.7}$$

$$\mathrm{Im}\,z = \frac{z-z^*}{2}\,. \tag{2.8}$$

Poleg tega velja tudi

$$|z|^2 = zz^*\,, \tag{2.9}$$

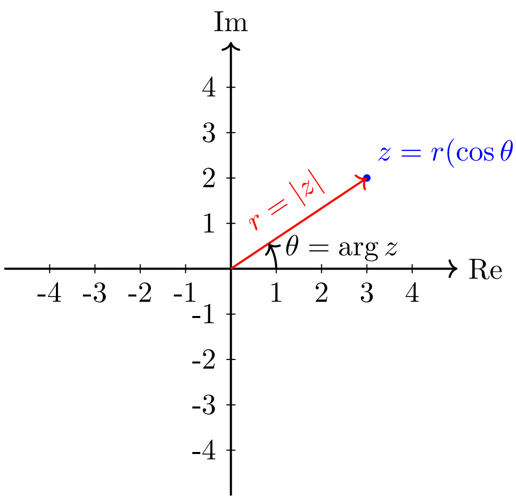
kjer je $|z|$ absolutna vrednost kompleksnega števila, ki jo bomo spoznali v nadaljevanju.

2.3 Trigonometrična oblika

Če uvedemo polarne koordinate namesto kartezičnih, dobimo **trigonometrično obliko** kompleksnega števila:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)\,. \tag{2.10}$$

S skice namreč razberemo, da velja $\mathrm{Re}(z) = r\cos\theta$ in $\mathrm{Im}(z) = r\sin\theta$.



Razdaljo od izhodišča do kompleksnega števila $|z| = r$ imenujemo **modul** ali **absolutna vrednost** kompleksnega števila. Kót θ, merjen v radianih, pa imenujemo **argument** kompleksnega števila, ki ga označimo z $\arg(z)$. Načeloma lahko zavzame vse realne vrednosti, kadar pa se nahaja na intervalu $-\pi < \theta \leq \pi$, pa ga imenujemo **glavna vrednost argumenta** kompleksnega števila. Če je θ argument nekega kompleksnega števila, potem so vsi ostali možni argumenti tega števila oblike $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Iz trigonometričnega lahko v algebrski zapis prehajamo tako:

$$a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta\,. \tag{2.11}$$

V obratni smeri pa velja tole:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan\theta = \frac{b}{a}\,. \tag{2.12}$$

S tem dobimo sicer le tangens argumenta. Kvadrant argumenta moramo določiti z razmislekom oziroma s skico.

2.4 Eulerjeva formula

Trigonometrično obliko pa se da zapisati še na lepši način, kar bomo v nadaljnjem izpeljali.

Sinus in kosinus se lahko zapiše v obliki neskončne potenčne vrste (vrsta, ki ima neskončno členov oblike $a_i x^i$). Velja:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\,, \tag{2.13}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}\,. \tag{2.14}$$

Sedaj želimo najti krajši zapis za izraz $\cos x + i\sin x$. Izkaže se, da ključ leži v eksponentni funkciji z osnovo $e = 2{,}71828\ldots$, ki je posebna zato, ker ima od vseh eksponentnih funkcij najlepši razvoj v potenčno vrsto. Velja namreč

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}\,. \tag{2.15}$$

Običajno bi lahko to vrsto uporabljali le v kontekstu realnih števil, toda poskusimo sedaj vstaviti imaginarno število:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots = \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) = \\ &= \cos x + i\sin x\,. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Pri tem smo posebej ločili imaginarni in realni del ter ugotovili, da je realni del enak $\cos x$, imaginarni pa $\sin x$. Ugotovitev imenujemo **Eulerjeva formula**:

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x\,.} \tag{2.17}$$

To nadvse navdušujočo relacijo med eksponentno in trigonometričnima funkcijama bomo sedaj bolje raziskali. Vstavimo $x = \pi$ in dobimo:

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1\,. \tag{2.18}$$

Ugotovitvi pravimo **Eulerjeva identiteta**:

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0\,.} \tag{2.19}$$

Nadvse čudovita identiteta nam povezuje temeljne matematične količine e, i, π, 1 in 0, zato o Eulerjevi identiteti mnogi pravijo, da je primer *matematične lepote*. Imenovana je tudi za najlepšo matematično identiteto.

2.5 Trigonometrične funkcije

Zanimiva uporaba Eulerjeve identitete se pojavi pri redefiniciji trigonometričnih funkcij. Zapišimo izraza za e^{ix} in e^{-ix}:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x\,, \tag{2.20}$$

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x\,. \tag{2.21}$$

Upoštevali smo, da je kosinus soda in sinus liha funkcija. Če seštejemo oba eksponenta, dobimo dvakratnik kosinusa. Če pa odštejemo oba eksponenta, pa dobimo z $2i$ zmnožen sinus. Dognanja strnemo:

$$\boxed{\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\,,}$$

$$\boxed{\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\,.}$$

2.6 Eksponentna oblika

Uporabimo sedaj Eulerjevo formulo, da krajše zapišemo trigonometrično obliko zapisa kompleksnega števila $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, ki jo imenujemo **eksponentna oblika** kompleksnega števila:

$$\boxed{z = re^{i\theta}\,.} \tag{2.22}$$

Ponovno je $r = |z|$ absolutna vrednost, $\theta = \arg z$ pa argument. Eksponentna oblika je še posebej primerna za množenje, deljenje in potenciranje. Denimo, da $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ in $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$:

$$z_1 z_2 = \left(r_1 e^{i\theta_1}\right) \cdot \left(r_2 e^{i\theta_2}\right) = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)}\,. \tag{2.23}$$

Očitno preprosto zmnožimo modula obeh števil in seštejemo njune argumente. Podobno poteka tudi pri deljenju. Število v eksponentni obliki lahko enostavno tudi potenciramo na celo število n:[1]

$$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}\,. \tag{2.24}$$

Sedaj tudi bolje vidimo, zakaj velja $e^{i\pi} = -1$. To je namreč kompleksno število z velikostjo 1 in argumentom π, kar vidimo da ravno ustreza -1. Podobno lahko preprosto vidimo, da velja $e^{i\pi/2} = i$, saj je to število z velikostjo 1, ki ima argument $\pi/2$. Če je argument večkratnik od 2π, potem bo število ležalo na pozitivni realni osi. Če je njegova velikost 1, torej velja:

$$e^{2\pi ik} = 1, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{2.25}$$

Omenimo še, da vedno velja sledeča formula za poljubni kompleksni števili a in b:

$$e^a e^b = e^{a+b}\,. \tag{2.26}$$

[1]Pri kompleksnih številih ta formula v splošnem ne velja za poljuben $n \in \mathbb{R}$, le za celoštevilski n.