Množice in števila

Teorija

Peter Andolšek

Oktober 2024

Fiziki predstavljajo osnovo množice in števila. Čeprav običajno zadošča že grobo poznavanje, jih je mnogokdaj dobro poznati tudi temeljiteje.

1. Logična notacija

Za začetek si je ključno pogledati osnove logične notacije, ki nam bo dostikrat skrajšala zapise izrazov. **Izjava** je trditev, ki lahko drži ali pa ne drži: zavzame pravilno (1) ali napačno (0) vrednost. Iz več izjav lahko tvorimo sestavljene izjave z **logičnimi operacijami**, ki jih poznamo že iz vsakdanjega jezika in so razvidne v spodnji pravilnostni tabeli, kjer so zapisane vse kombinacije izjav A in B

A	B	ne A	A in B	A ali B	A, če in samo če B	ali A ali B	če A, potem B
A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \iff B$	$A \veebar B$	$A \implies B$
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1

Če želimo povedati vrstni red logičnih operacij, uporabimo oklepaje. Sicer pa velja sledeči vrsti red povezav, kjer vsaka povezava veže močneje od naslednje:

$$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \implies \quad \iff \tag{1.1}$$

Na tem mestu je ključno omeniti še dva *kvantifikatorja*, ki pogosto skrajšata pisanje in naredita ideje jasnejše.

Za vsak x lahko označimo z $\forall x$, kjer smo uporabili **univerzalnostni kvantifikator** $\forall$, ki ga preberemo *za vsak*. Zapomnimo si, da je $\forall$ preprosto narobe obrnjen A, ki predstavlja *for All*.

Obstaja vsaj en x zaznamujemo z $\exists x$, kjer smo uporabili **eksistencialnostni kvantifikator** $\exists$ (*obstaja vsaj en*). Zapomnimo si, da je $\exists$ preprosto zrcaljen E, ki predstavlja *there Exists*.

Primer: *obstaja tako naravno število, ki je strogo večje od 5*, zaznamujemo z $\exists n \in \mathbb{N}, n > 5$.

Vsak kvadrat realnega števila je večji ali enak 0 zapišemo z $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.

Uvod v logično notacijo zaključimo še z znakom **je definiran kot** $:=$ oziroma $\stackrel{\text{def}}{=}$, v fiziki pogosto tudi $\equiv$. Kadar želimo povedati, da je od sedaj naprej a drugo ime za b, to označimo z $a := b$ in beremo, da je a *definiran kot* b. Hiperbolični kosinus lahko na primer definiramo tako:

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,. \tag{1.2}$$

1

2. Množice

Množica je nabor različnih stvari, ki se imenujejo **elementi množice**. Če je nek objekt a element množice $\mathcal{M}$, rečemo, da a **pripada** $\mathcal{M}$ in pišemo $a \in \mathcal{M}$. V nasprotnem primeru pišemo $a \notin \mathcal{M}$. Če so vsi elementi množice $\mathcal{B}$ tudi v množici $\mathcal{A}$, je $\mathcal{B}$ **podmnožica** množice $\mathcal{A}$, kar zapišemo z $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Tako vedno velja $\{\} \subseteq \mathcal{A}$ in $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$.

2.1 Zapis množice

Množico lahko definiramo na več načinov, med katerimi najpogosteje uporabljamo slednja načina:

Zapis elementov. Najpogosteje preprosto zapišemo vse elemente, ki pripadajo množici, recimo

$$\mathcal{A} = \{\text{trikotnik, kvadrat, sedemkotnik}\} \tag{2.1}$$

$$\mathcal{B} = \{1, 3, 5, 9\} \tag{2.2}$$

Kadar so množice neskončne, to nakažemo s tropičjem. Množico vseh lihih števil tako označimo z

$$\mathcal{L} = \{1, 3, 5, 7, \dots\} \tag{2.3}$$

Zapis s predpisom. Pri tem načinu določimo množico tako, da določimo pogoj, ki mu morajo zadoščati elementi neke večje množice. Množico naravnih števil med 5 in 20 tako zapišemo z

$$\mathcal{C} = \{n \mid n \in \mathbb{N},\ 5 \leq n \leq 20\} \tag{2.4}$$

Za zavitim oklepajem smo zapisali ime elementa, ki se lahko pojavi v množici. Zapišemo navpično črto in vse pogoje, ki jim morajo elementi zadoščati. Zapišimo tako še enkrat množico vseh lihih števil:

$$\mathcal{L} = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}_0\} \tag{2.5}$$

2.2 Operacije nad množicami

Moč množice, imenovana tudi *kardinalnost*, nam pove število elementov množice. Moč množice $\mathcal{A}$ zapišemo z $|\mathcal{A}|$. Če je moč množice enaka 0, jo lahko označimo z $\{\}$ oziroma $\emptyset$.

Unija dveh množic vsebuje vse elemente, ki so v vsaj eni od množic. Formalno,

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{e \mid e \in \mathcal{A} \vee e \in \mathcal{B}\} \tag{2.6}$$

Presek dveh množic vsebuje vse elemente, ki so elementi obeh množic. Formalno,

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{e \mid e \in \mathcal{A} \wedge e \in \mathcal{B}\} \tag{2.7}$$

Razlika dveh množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ vsebuje vse elemente, ki so elementi množice $\mathcal{A}$, toda niso elementi množice $\mathcal{B}$. Formalno,

$$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{e \mid e \in \mathcal{A} \wedge e \notin \mathcal{B}\} \tag{2.8}$$

Kartezični produkt je množica, ki vsebuje vse urejene pare, pri katerih je prvi element prve množice, drugi pa druge množice. Formalno,

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(a, b) \mid a \in \mathcal{A} \wedge b \in \mathcal{B}\} \tag{2.9}$$

Če množico realnih števil $\mathbb{R}$ identificiramo kot množico točk na premici, potem je $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ množica vseh točk na ravnini, saj vsebuje vse elemente oblike (a, b), kjer sta a in b realni števili. Kadar neko množico večkrat množimo samo s sabo, to označimo s potenco:

$$\mathcal{A}^n = \underbrace{\mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A}}_{n\text{-krat}} \tag{2.10}$$

Potenčna množica množice $\mathcal{A}$ je množica, ki vsebuje vse podmnožice od $\mathcal{A}$. Če je $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$, je potenčna množica enaka

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}\,. \tag{2.11}$$

Moč potenčne množice je enaka

$$|\mathcal{P}(\mathcal{A})| = 2^{|\mathcal{A}|}\,. \tag{2.12}$$

3. Števila

Najpomembnejše množice v fiziki so *številske množice*. Že v otroštvu se srečamo z množico **naravnih števil**

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}\,. \tag{3.1}$$

Kadar želimo vključiti še število 0, pišemo $\mathbb{N}_0$. Naravna števila delimo lahko na praštevila, sestavljena števila in število 1. Na njih lahko operiramo z operacijami seštevanja, množenja (večkratnega seštevanja) in potenciranja (večkratnega množenja). Včasih pa lahko definiramo tudi obratne operacije odštevanja, deljenja in korenjenja, vendar moramo paziti, da rezultat še vedno pripada naravnim številom. Tako mora biti pri odštevanju dveh naravnih števil prvo število vedno večje od drugega.

Zgornji omejitvi se izognemo, če uporabimo množico **celih števil**

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}, \tag{3.2}$$

kjer se pojavijo tudi *nasprotne vrednosti* naravnih števil $-a$. Odštevanje je ekvivalentno prištevanju nasprotne vrednosti števila, $a - b = a + (-b)$. Tako so cela števila zaprta tudi za odštevanje.

Znotraj množice celih števil ne obstaja število $5/9$, zato uvedemo množico **racionalnih števil** $\mathbb{Q}$, ki jih sestavljajo vsi količniki dveh celih števil (kjer delitelj ne sme biti 0):

$$\mathbb{Q} = \{a/b \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}\,. \tag{3.3}$$

Racionalna števila lahko vedno zapišemo kot ulomek dveh celih števil, lahko pa tudi kot decimalno število s končnim zapisom ali pa s ponavljajočimi se decimalkami.

Kljub temu, da so racionalna števila zaprta pod vsemi štirimi osnovnimi operacijami, vseeno niso popolna, kar pomeni, da obstaja med njimi neskončno lukenj. Matematična analiza se pogosto ukvarja z zveznimi spremembami, ki jih pa s takim luknjastim številskim sistemom ne moremo opisati, zato potrebujemo novega.

Primer: neskončne vsote zaporedja racionalnih števil niso nujno elementi racionalnih števil. Vzemimo recimo število π, ki ga ne moremo zapisati kot ulomek, lahko pa ga zapišemo kot vsoto racionalnih števil.

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \cdots \tag{3.4}$$

Vsa števila, ki se jih da zapisati kot vsoto zaporedja racionalnih števil, imenujemo **realna števila** $\mathbb{R}$. Realna števila si lahko predstavljamo tudi kot množico vseh decimalnih števil, ki imajo lahko tudi neskončno neponavljajočih se decimalnih mest. Poleg tega so nenegativna realna števila zaprta tudi pod korenjenjem.

Vendar znotraj realnih števil še vedno ni možno koreniti negativnih realnih števil. To lahko storimo šele znotraj množice **kompleksnih števil** $\mathbb{C}$, kjer uvedemo *imaginarno enoto* i, ki je rešitev enačbe $x^2 + 1 = 0$. Splošno kompleksno število lahko zapišemo v obliki $z = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$. Kompleksna števila se znotraj matematike zelo lepo obnašajo in sestavljajo vejo *kompleksne analize*. Zaradi lepih lastnosti se kompleksna števila uporabljajo tudi širom fizike, še posebej pri obravnavi nihanj, elektrodinamiki in kvantni mehaniki.

3.1 Uporabnejši pojmi

3.1.1 Vsote in produkti

Kadar seštevamo veliko členov a_i nekega zaporedja, to krajše zapišemo s pomočjo **znaka za seštevanje** $\sum$:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \,. \tag{3.5}$$

Pod znakom za seštevanje definiramo indeks, po katerem seštevamo člene od 1 do n. Kadar imamo opravka z neskončnim zaporedjem in želimo sešteti vse člene, to zapišemo tako:

$$a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \,. \tag{3.6}$$

Podobno uporabljamo tudi **znak za množenje** $\prod$:

$$a_1 a_2 \cdots a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k \,. \tag{3.7}$$

Primer je izraz za Eulerjevo število e:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \,. \tag{3.8}$$

Pri tem smo uporabili znak za **fakulteto** $n!$, ki označuje zmnožek vseh števil do n in nam pove število načinov, na katere lahko razporedimo različnih n elementov v vrsto:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \,. \tag{3.9}$$

Vredno je omeniti, da $0! = 1$.

1

3.1.2 Posebne vrste

Vrsta je izraz za vsoto členov zaporedja. Oglejmo si nekaj pomembnejših vrst, ki jih bomo potrebovali v prihodnjih urah.

Najprej si oglejmo vsoto prvih n naravnih števil, ki predstavlja poseben primer *aritmetične vrste*:

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n\,. \tag{3.10}$$

Zapišimo to vrsto še v nasprotni smeri:

$$S = n + (n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1\,. \tag{3.11}$$

Če obe vrsti seštejemo eno nad drugo, dobimo:

$$2S = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) + (n+1) = n(n+1)\,. \tag{3.12}$$

Torej,

$$\boxed{S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,.} \tag{3.13}$$

Sedaj si oglejmo še sledečo vsoto, ki je poseben primer *geometrijske vrste*:

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n\,. \tag{3.14}$$

Če vrsto S množimo s q, dobimo

$$qS = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + q^{n+1}\,. \tag{3.15}$$

Če na obeh straneh prištejemo 1 in odštejemo q^{n+1}, dobimo spet vrsto S. Velja torej:

$$qS + 1 - q^{n+1} = S\,, \tag{3.16}$$

$$\boxed{S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\,.} \tag{3.17}$$

Če je $|q| < 1$, nam vrsta konvergira tudi za neskončno členov, pri čemer je (po podobni izpeljavi) enaka:

$$\boxed{S = 1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q},\ |q| < 1\,.} \tag{3.18}$$

3.1.3 Ocene velikosti

V fiziki je ključno razne stvari predpostaviti in nekatere zanemariti, saj le tako lahko uspešno modeliramo realni svet z matematiko. Zato je potrebno poznati tudi nekatere dogovore, kako te predpostavke zaznamovati.

Kadar sta količini identično enaki, to zaznamujemo s preprostim enačajem:

$$1/2 = 0{,}5\,. \tag{3.19}$$

Kadar smo rezultat zaokrožili, pa uporabimo znak za **približno enako** $\approx$ oziroma $\doteq$:

$$1/3 \approx 0{,}33\,. \tag{3.20}$$

Če je določena količina M tako zelo večja od m, to označimo z znakom za **mnogo večje** $\gg$:

$$M \gg m \tag{3.21}$$

oziroma **mnogo manjše** $\ll$:

$$m \ll M\,. \tag{3.22}$$

Pod takšnimi predpostavkami lahko poenostavimo določene izraze. Vedno na primer velja

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2\,, \tag{3.23}$$

toda če velja $|x| \ll 1$, potem lahko člen x^2 zanemarimo in pišemo

$$(1+x)^2 \approx 1 + 2x,\; |x| \ll 1\,. \tag{3.24}$$

V splošnem celo velja

$$(1+x)^n \approx 1 + nx,\; |x| \ll 1\,. \tag{3.25}$$

Za kako majhen x bomo pisali $|x| \ll 1$, pa je stvar občutka in želene natančnosti. V astronomiji pogosto uporabljamo približek $\tan x \approx x$, $x \ll 1$, kjer je x v radianih. Če želimo določiti položaj Jupitra na nekaj ločnih sekund natančno ($1'' \approx 0{,}0000048^{\mathrm{rad}}$), vsekakor ne bomo rekli, da $\tan 0{,}2 = 0{,}2$. Če pa želimo preprosto oceniti velikost sosednjega hriba, bomo pa zadovoljni tudi še s približkom $\tan 1 = 1$.

Posebna vrsta nalog v fiziki in astronomiji so naloge, pri katerih je potrebno želeno količino kvečjemu oceniti oziroma določiti *red velikosti*. Primer je recimo ocena števila dreves v Sloveniji. Ko z določenimi predpostavkami in ocenami pridemo do števila $N = 1{,}427\,36 \cdot 10^9$, ga raje zapišemo v obliki $N \sim 10^9$, saj smo ocenili kvečjemu red velikosti. Znak $\sim$ beremo **je istega reda velikosti kot**.