Elektromagnetizem
Rešitve

Peter Andolšek
April 2025

1. Vektorska analiza

1.1 Vektorski operatorji

Naloga 1.1 (*Griffiths 1.15 & 1.18*).

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -6xz \\ 2z \\ 3z^2 \end{pmatrix}$$

Naloga 1.2 (*Griffiths 1.25*).

(a)

$$\nabla^2 T = -3 \sin x \sin y \sin z$$

(b)

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Naloga 1.3 (*Griffiths 1.27*).

$$\boldsymbol{\nabla} T = \begin{pmatrix} e^x \sin y \ln z \\ e^x \cos y \ln z \\ \dfrac{e^x \sin y}{z} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} T) = \begin{pmatrix} \dfrac{e^x \cos y}{z} - \dfrac{e^x \cos y}{z} \\ \dfrac{e^x \sin y}{z} - \dfrac{e^x \sin y}{z} \\ e^x \cos y \ln z - e^x \cos y \ln z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.2 Integrali na vektorskih poljih

Naloga 1.4 (*Griffiths E1.6*).

Pot (1).

Razdelimo pot na dva dela: od (1, 1, 0) do (2, 1, 0) in od (2, 1, 0) do (2, 2, 0).

(a) Pot je

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad t \in [0,1]$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Izrazimo vektorsko polje s parametrom t:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2x(y+1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2(1+t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Integriramo:

$$\int_{(1)\mathrm{a}} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^1 1 \, \mathrm{d}t = 1.$$

(b) Pot je

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+t \\ 0 \end{pmatrix}; \quad t \in [0,1]$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{d}t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Izrazimo vektorsko polje s parametrom t:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2x(y+1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+t)^2 \\ 4(2+t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Integriramo:

$$\int_{(1)\mathrm{b}} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^1 [4(2+t)] \, \mathrm{d}t = 10.$$

Skupni integral je torej

$$\int_{(1)} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 11.$$

Pot (2).
Pot parametriziramo tako:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \\ 0 \end{pmatrix}; \quad t \in [0,1]$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Izrazimo vektorsko polje s parametrom t:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2x(y+1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+t)^2 \\ 2(1+t)(2+t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Integriramo:

$$\int_{(2)} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^1 [(1+t)^2 + 2(1+t)(2+t)] \, \mathrm{d}t = 10.$$

S to nalogo lahko jasno vidimo, da je v splošnem integral vektorskega polja po krivulji odvisen od ubrane poti.

10

Naloga 1.5 (*Griffiths E1.7*). Po vrsti poračunamo prispevke vseh ploskev:

(i) $x = 2, \quad \mathrm{d}\mathbf{S} = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 2xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 4z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, torej

$$\iint \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 4\int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^2 z\,\mathrm{d}z = 16.$$

(ii) $x = 0, \quad \mathrm{d}\mathbf{S} = -\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = -2xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0$, torej

$$\iint \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 0.$$

(iii) $y = 2, \quad \mathrm{d}\mathbf{S} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = (x+2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$, torej

$$\iint \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_0^2 (x+2)\,\mathrm{d}x \int_0^2 \mathrm{d}z = 12.$$

(iv) $y = 0, \quad \mathrm{d}\mathbf{S} = -\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = -(x+2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$, torej

$$\iint \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = -\int_0^2 (x+2)\,\mathrm{d}x \int_0^2 \mathrm{d}z = -12.$$

(v) $z = 2, \quad \mathrm{d}\mathbf{S} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = y(z^2-3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, torej

$$\iint \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^2 y\,\mathrm{d}y = 4.$$

Skupen pretok je torej

$$\iint \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 16 + 0 + 12 - 12 + 4 = 20.$$

Naloga 1.6 (*Griffiths E1.8*). Tri integrale lahko poračunaš v poljubnem vrstnem redu: sedaj bomo najprej integrirali po x (ki ima meje 0 in $(1-y)$), potem po y (ki gre med 0 in 1) in na koncu z (ki gre med 0 in 1):

$$\begin{aligned}\iiint T\,\mathrm{d}V &= \int_0^3 \left\{ \int_0^1 y \left[\int_0^{1-y} x\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}z = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^3 z^2\,\mathrm{d}z \int_0^1 (1-y)^2 y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot\frac{1}{12} = \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

1.3 Osnovni izreki

Naloga 1.7 (*Griffiths E1.9*). Najprej izračunamo gradient:

$$\boldsymbol{\nabla} T = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dobimo:

$$\int_{\mathrm{i}} \boldsymbol{\nabla} T\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = 0,$$

$$\int_{\mathrm{ii}} \boldsymbol{\nabla} T\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = 2,$$

$$\int_{\mathrm{iii}} \boldsymbol{\nabla} T\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = 2.$$

V obeh primerih (i + ii oz. iii) dobimo integral po krivulji enak 2. Res, integral gradienta mora biti neodvisen od poti (odvisen le od začetne in končne točke) in enak

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \boldsymbol{\nabla} T\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = T(\mathbf{b}) - T(\mathbf{a}) = 2 - 0 = 2.$$

Naloga 1.8 (*Griffiths E1.10*). Divergenca je

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 2(x+y).$$

Volumenski integral divergence je

$$\iiint (\nabla \cdot \mathbf{v})\, \mathrm{d}V = 2\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x+y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = 2\int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^1 \left(\frac{1}{2}+y\right) \mathrm{d}y = 2$$

Za desno stran osnovnega izreka o divergencah je potrebno poračunati integral $\oiint \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$. To naredimo (analogno kot v nalogi 1.5) za vseh šest ploskev in dobimo (v drugem delu enačbe sem zaporedoma napisal prispevke ploskev i, ii, iii, iv, v in vi v tem vrstnem redu):

$$\oiint \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + 1 + 0 = 2.$$

Naloga 1.9 (*Griffiths E1.11*). Rotor je

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4z^2 - 2x \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Za dano orientacijo roba ploskve (ki gre v nasprotni smeri urnega kazalca) po pravilu desne roke kaže ploskev v pozitivno smer x. Ploskev je torej $\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\hat{\mathbf{x}}$. Za to površino je $x=0$, torej

$$\iint (\nabla \times \mathbf{v})\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_0^1\int_0^1 4z^2\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \frac{4}{3}.$$

Integral po krivulji razdelimo na 4 kose:

(i) $x=0,\quad z=0,\quad \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 3y^2\,\mathrm{d}y\,,\quad \int \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^1 3y^2\,\mathrm{d}y = 1.$

(ii) $x=0,\quad y=1,\quad \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 4z^2\,\mathrm{d}z\,,\quad \int \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^1 4z^2\,\mathrm{d}z = \frac{4}{3}.$

(iii) $x=0,\quad z=1,\quad \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 3y^2\,\mathrm{d}y\,,\quad \int \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_1^0 3y^2\,\mathrm{d}y = -1.$

(iv) $x=0,\quad y=0,\quad \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0,\quad \int \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_1^0 0\,\mathrm{d}z = 0.$

$$\oint \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 1 + \frac{4}{3} - 1 + 0 = \frac{4}{3}.$$

Naloga 1.10 Rezultat bomo izračunali na dva načina:

(1) Vektorsko funkcijo v sfernih koordinatah lahko izrazimo tako:

$$v_r = \frac{1}{r^2},\quad v_\theta = 0,\quad v_\phi = 0.$$

S formulo za divergenco v sfernih koordinatah dobimo:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{1}{r^2}\right) = 0.$$

(2) Uporabimo dejstvo $\mathbf{r} = (x,y,z)$ in $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ter dobimo:

$$\mathbf{v} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Po definiciji seveda velja

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Najprej izračunamo prvi člen:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\Big) = (x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}.$$

Podobno storimo še za druga dva člena in dobimo

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = 3(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} = 0.$$

Sedaj preverimo rezultat z osnovnim izrekom za divergence: za vsako območje $\mathcal{V}$ velja

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})\,\mathrm{d}V = \oiint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Za $\mathcal{V}$ si izberemo sfero s polmerom R. Površinski integral ima konstanten integrand, zato je enak kar

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 4\pi R^2\frac{\hat{\mathbf{r}}}{R^2}\cdot\hat{\mathbf{r}} = 4\pi$$

Rezultat je presenetljiv, saj smo prej izračunali, da je $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = 0$, torej bi moralo veljati tudi $\iiint(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})\,\mathrm{d}V = 0$. Ali se moti osnovni izrek za divergence ali mi?

Še enkrat razmislimo o problemu. Zgoraj smo izračunali, da je integral divergence po volumnu za vsako sfero enak 4π. Enostavno si lahko predstavljamo, da mora biti torej divergenca povsod enaka 0, razen v izhodišču, kjer mora biti njen integral enak 4π. Spomnimo se, da je funkcija delta takšna, da je neničelna le v izhodišču (kjer je neskončna), njen integral pa je enak 1. Rezultat lahko res zapišemo s tridimenzionalno posplošitvijo funkcije delta:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right) = 4\pi\delta^3(\mathbf{r}).$$

Kako pa to, da smo prej na dva načina dobili odgovor 0? Postopka nista bila veljavna za izhodišče, saj v teh primerih delimo z 0. Res, vidimo da smo povsod drugje dobili pravilni odgovor – divergenca je enaka 0. Naš sklep je v bistvu bil, da ko se zelo približamo izhodišču, se divergenca bliža 0. Sedaj pa vidimo, da je to popolnoma res – toda v samem izhodišču je divergenca neskončna.

Problem je zelo relevanten za elektrostatiko, kjer je osnovna enačba Gaussov zakon. Za točkasti naboj q v izhodišču zapišemo gostoto naboja $\rho = q\delta^3(\mathbf{r})$ in Gaussov zakon se glasi:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}\delta^3(\mathbf{r}).$$

Z zgornjim rezultatom ugotovimo, da velja ravno

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right) = \frac{q}{\epsilon_0}\delta^3(\mathbf{r}).$$

Sklenemo lahko, da je električno polje točkastega naboja podano z

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}.$$

Temu pravimo Greenova funkcija Gaussovega zakona. S principom superpozicije pa lahko z Greenovo funkcijo dobimo električno polje poljubne porazdelitve naboja.

1.4 Potenciali

Naloga 1.11

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_1 = 0.$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_1 = 2x\,\hat{\mathbf{y}}.$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_2 = 3.$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}.$$

Prvo polje je brezizvirno, drugo pa brezvrtinčno. Prvo polje lahko torej zapišemo kot rotor nekega vektorskega potenciala – takšen je recimo

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x^3/3 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{F}_1 = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}_1.$$

Drugo polje pa lahko zapišemo kot gradient nekega skalarnega potenciala – takšen je recimo

$$V_2 = -\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \longrightarrow \mathbf{F}_2 = -\boldsymbol{\nabla} V_2.$$

Spomnimo se izraza za Hookov zakon:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r}.$$

Podobno torej lahko ugotovimo, da lahko takšno silo zapišemo kot negativni gradient funkcije

$$W_\mathrm{p} = \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \longrightarrow \mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} W_\mathrm{p},$$

ki jo seveda že poznamo kot prožnostno potencialno energijo vzmeti.

Se nadaljuje ...